

УДК 519.6

DOI: 10.32626/2308-5916.2024-25.10-21

А. Я. Бомба, д-р техн. наук, професор,**М. В. Бойчура**, канд. техн. наук,**С. В. Шатний**, канд. техн. наук,**О. М. Багнюк**,**Н. В. Іванчук**, канд. техн. наукНаціональний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

ІДЕНТИФІКАЦІЯ КООРДИНАТ ІМПУЛЬСНИХ ДЖЕРЕЛ ЗАБРУДНЕНЬ СТИЧНИХ ВОД В КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЧИСЛОВИМИ МЕТОДАМИ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Розглядається процес фільтрації в однозв'язній криволінійній області, обмеженій лініями течії та еквіпотенціальними лініями за умови, що досліджуване середовище є кусково-однорідним. Припускається, що окремі наперед невідомі криві виступають у якості імпульсних джерел забруднень. При цьому вважаємо, що їх поширення відбувається лише за рахунок конвективної складової, суттєво не впливаючи на фільтраційний фон. Для ідентифікації координат джерел забруднень запропоновано використовувати метод характеристик щодо розв'язання рівняння конвекції. У такому випадку в якості апріорних даних можуть виступати квазіпотенціали на ділянках входу та виходу рідини на границі області, координати точок виявлення забруднення та час його руху по течії. Загальний алгоритм передбачає адаптацію числового методу квазіконформних відображень для побудови гідродинамічної сітки, на основі чого – ідентифікацію координат джерел забруднень.

Проведено числові експерименти та здійснено їх аналіз. Зокрема підкреслено, що при достатньому розбитті сітки максимальні нев'язки між апріорно відомими даними та розрахованими є невеликими у порівнянні з розмірами досліджуваної області. Це свідчить про ефективність розробленого алгоритму ідентифікації джерел забруднень у випадку кусково-однорідного середовища. У якості додаткових мір для зниження величини нев'язок пропонується використовувати більш точні схеми наближення окремих виразів. З іншого боку, спостерігається збільшення обчислювальної складності в порівнянні з випадком неперервного задання коефіцієнта фільтрації.

Враховуючи порівняно високу точність розрахунків вбачається за доцільне подальший розвиток розробленого підходу на більш масштабні, в порівнянні із точковими джерелами за-

бруднень, та просторовий простір випадок. Враховуючи чутливість розв'язків до розриву значень коефіцієнта фільтрації варто також у перспективі вводити додаткові умови на контакті однорідних середовищ.

Ключові слова: *математичне моделювання, кусково-конформні відображення, нелінійні задачі, числові методи, точкове джерело.*

Вступ, загальна постановка задачі. У низці випадків навіть невеликі забруднення стічних вод можуть нести суттєвий негативний вплив на навколишнє середовище. Тому важливо розробляти нові ефективні підходи до виявлення відповідних ділянок входження домішкової речовини. У роботі [1] здійснювалась ідентифікація невідомих параметрів точкового джерела забруднення для одновимірної нестационарної задачі масопереносу при наявності апріорних даних в напрямку течії. Тоді як в [2] розроблено схожий алгоритм, але із врахуванням лише дифузійної складової руху. В обох роботах концентрація домішкової рідини у точці спостереження вважається заданою. Випадок, коли відомими є лише координати виявлення забруднень в напрямку течії та момент часу їх появи, досліджується у роботі [3]. Однак там не враховано наявність ділянок фільтрації з досить різкими перепадами коефіцієнта фільтрації. Тому доцільною є розробка алгоритму ідентифікації точкових імпульсних джерел забруднення у випадку кусково-однорідного середовища.

Аналогічно до [1-3] вважаємо, що в деякому пласті відбуваються квазіідеальні фільтраційні рухи. Нехай наперед невідомих лінійх виникають імпульсні джерела забруднень, які не впливають на фільтраційний фон. Необхідно ідентифікувати координати, звідки домішкова речовина почала свій рух. У якості додаткових даних, аналогічно до [3], виступатимуть точки, у яких виявлено забруднення та проміжок часу їх переміщення. Виявляється, що при такій постановці задачі виконання розрахунку розподілу концентрації речовини не є обов'язковим; можна обмежитись лише використанням методу характеристик [3, 4]. У такому випадку загальний процес розв'язання задачі полягає у побудові гідродинамічної сітки та області комплексного квазіпотенціалу, наприклад, числовими методами квазіконформних відображень [3, 5, 6] та, на основі цього, ідентифікації джерел забруднень за допомогою методу характеристик стосовно рівняння конвекції [3, 4].

Метою роботи є перенесення розробленого (на основі числових методів квазіконформних відображень та характеристик) комбінованого підходу до ідентифікації координат точкових імпульсних джерел (забруднень, теплових, вибухів тощо) за даними їх спостережень на певних проміжках часу у характерних точках на випадок кусково-однорідних середовищ.

Постановка задачі. Розглядається область G_z (грунтовий масив, горизонтальний фільтраційний пласт тощо), що складається з кусково-однорідних підобластей G_{z_r} ($\partial G_{z_r} = \{(x, y) : x = \tilde{x}_r(\tau), y = \tilde{y}_r(\tau), \tau \in [0,1]\}$) [5, 6] (рис. 1, а), відповідно з коефіцієнтами фільтрації κ_r ,

$$\kappa = \kappa(x, y) = \left\{ \kappa_r : (x, y) \in G_{z_r}, r = \overline{0, s-1}, \kappa_r > 0 \right\}. \quad (1)$$

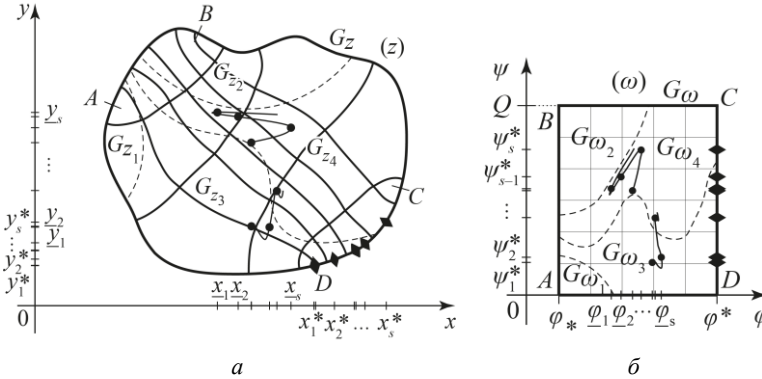


Рис. 1. Фізична область G_z (а) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_ω (б); штрихами позначено лінії розділу однорідностей; крапками та ромбами – джерела забруднень і точки їх виявлення, відповідно

Не зменшуючи загальності, границю досліджуваної області задаємо у вигляді бісплайнової кривої [7]

$$\partial G_z = \{z = x + iy : x = \tilde{x}(\tau) = \sum_{\xi=0}^{\tilde{m}-1} \tilde{x}_\xi b_{\xi,3}(\tau), y = \tilde{y}(\tau) = \sum_{\xi=0}^{\tilde{m}-1} \tilde{y}_\xi b_{\xi,3}(\tau),$$

$$\tau \in [0,1], \tilde{x}(1) = \tilde{x}(0), \tilde{y}(1) = \tilde{y}(0), b_{\xi,0}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } \tau \in [\tau_\xi, \tau_{\xi+1}), \\ 0, & \text{при } \tau \notin [\tau_\xi, \tau_{\xi+1}) \end{cases},$$

$$\tau_\xi = 0 \quad (\xi = \overline{0,3}), \quad \tau_\xi = \tau_{\xi-1} + \frac{1}{\tilde{m}-3} \quad (\xi = \overline{4, \tilde{m}}), \quad \tau_{\tilde{m}+\xi} = 1 \quad (\xi = \overline{1,4}),$$

$$b_{\xi,r}(\tau) = \frac{\tau - \tau_\xi}{\tau_{\xi+r} - \tau_\xi} b_{\xi,r-1}(\tau) + \frac{\tau_{\xi+r+1} - \tau}{\tau_{\xi+r+1} - \tau_{\xi+1}} b_{\xi+1,r-1}(\tau), \quad (\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_\xi) - \text{опорні точки, } \tilde{m} > 3 - \text{їх кількість} \}.$$

Вважаємо, що за рахунок дії різниць квазіпотенціалів φ_* , φ^* ($\varphi_* < \varphi^*$) в $\overline{G_z}$ відбувається фільтраційний рух рідини відповідно від

ділянки AB до CD [3, 5, 6]; AD і BC – непроникні граничні лінії течії; A, B, C, D – задані фіксовані точки на ∂G_z . Нехай додатково вздовж певних ліній $(\tilde{x}_l(\tau), \tilde{y}_l(\tau))$ (де $l = \overline{1, I}$, I – задане, $0 \leq \tau < 1$) імпульсно діють точкові джерела, які потрібно виявити [1-3]. У припущенні, що дифузійною складовою можна знехтувати, відповідне рівняння конвекції в G_z запишемо у вигляді [3, 4]:

$$v_x(x, y)u'_x + v_y(x, y)u'_y + u'_t = 0, \quad (2)$$

де $u = u(x, y, t)$ – концентрація домішкової речовини в точці (x, y) у момент часу t , $\vec{v} = (v_x, v_y)$ – вектор швидкості.

За умови, що забруднення суттєво не впливають на фільтраційний фон, знаходження поля швидкостей для (2) здійснюватимемо в результаті моделювання фільтраційних процесів на основі закону типу Дарсі $\vec{v} = \kappa \text{grad } \varphi$ [3, 5]. Тут $\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал, $\kappa = \kappa(x, y)$ – коефіцієнт фільтрації. Вважаємо, що $\text{div } \vec{v} = 0$. Це дозволяє ввести функцію $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$. Тоді задача на квазіконформне (кусково-конформне) відображення фізичної області G_z (рис. 1, а) на область комплексного квазіпотенціалу G_ω (рис. 1, б) при заданих φ_* , φ^* і $\kappa = \kappa(x, y)$ та шуканих $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$ і Q можна записати у наступному вигляді [3, 5, 6]:

$$\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (x, y) \in G_z, \quad (r = \overline{0, s-1}); \quad (3)$$

$$[\varphi] \Big|_{\partial G_z} = 0, \quad \left[\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial v_z} \right] \Big|_{\partial G_z} = 0 \quad (r = \overline{1, s-1}); \quad (4)$$

$$\varphi \Big|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CD} = \varphi^*; \quad (5)$$

$$\psi \Big|_{AD} = 0,$$

$$\psi \Big|_{BC} = Q = \int_{AB} -\kappa \varphi'_y dx + \kappa \varphi'_x dy = \sum_{L_r \in AB} \int_{L_r} -\kappa_r \varphi'_y dx + \kappa_r \varphi'_x dy, \quad (6)$$

де $\bigcup_r L_r \in AB$, $\bigcup_{r_1, r_2} L_{r_1} \cap L_{r_2} = \emptyset$; Q – фільтраційна витрата;

$G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \psi < Q\}$; \vec{v}_z – одиничний вектор нормалі.

Відповідна до (1), (3)-(6) обернена задача на кусково-конформне відображення області комплексного квазіпотенціалу G_ω (рис. 1, б) на

фізичну область G_z (рис. 1, а) при шуканих функціях $x = x(\varphi, \psi)$ і $y = y(\varphi, \psi)$ та за невідомої витрати Q запишемо в аналогічному до [3, 5, 6] вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_{\omega_r} \quad (r = \overline{0, s-1}); \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0,$$

$$[x] \Big|_{\partial G_{\omega_r}} = 0, [y] \Big|_{\partial G_{\omega_r}} = 0,$$

$$\left[\kappa \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \cdot \vec{\nu}_{\omega} \right] \Big|_{\partial G_{\omega_r}} = 0 \quad (r = \overline{1, s-1}); \quad (8)$$

$$x(\varphi_*, \psi) = \tilde{x}(\tau_*(\psi)), \quad y(\varphi_*, \psi) = \tilde{y}(\tau_*(\psi)), \quad x(\varphi, Q) = \tilde{x}(\bar{\tau}(\varphi)), \quad (9)$$

$$y(\varphi, Q) = \tilde{y}(\bar{\tau}(\varphi)), \quad x(\varphi^*, \psi) = \tilde{x}(\tau^*(\psi)), \quad y(\varphi^*, \psi) = \tilde{y}(\tau^*(\psi)),$$

$$x(\varphi, 0) = \tilde{x}(\underline{\tau}(\varphi)), \quad y(\varphi, 0) = \tilde{y}(\underline{\tau}(\varphi)), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad 0 \leq \psi \leq Q;$$

$$\tilde{x}'(\tau) y'_{\varphi}(\varphi_*, \psi) + \tilde{y}'(\tau) x'_{\varphi}(\varphi_*, \psi) = 0, \quad \tilde{x}'(\tau) y'_{\varphi}(\varphi^*, \psi) + \tilde{y}'(\tau) x'_{\varphi}(\varphi^*, \psi) = 0, \quad (10)$$

$$\tilde{x}'(\tau) y'_{\varphi}(\varphi, 0) + \tilde{y}'(\tau) x'_{\varphi}(\varphi, 0) = 0, \quad \tilde{x}'(\tau) y'_{\psi}(\varphi, 0) + \tilde{y}'(\tau) x'_{\psi}(\varphi, 0) = 0,$$

$$\tilde{x}'(\tau) y'_{\psi}(\varphi, Q) + \tilde{y}'(\tau) x'_{\psi}(\varphi, Q) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad 0 \leq \psi \leq Q,$$

де $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ – якобіан переходу; G_{ω_r} – області, які конформно відповідають областям G_z ;

$\tau = \tau_*(\psi)$, $\tau = \tau^*(\psi)$, $\tau = \underline{\tau}(\varphi)$, $\tau = \bar{\tau}(\varphi)$ – розрахункові залежності параметрів задання границі фізичної області від значень функцій течії та квазіпотенціалу; $\vec{\nu}_{\omega}$ – направляючий вектор нормалі. Тоді як вираз (2) зручно замінити наступним [3, 4]:

$$\nu^2(\varphi, \psi) c'_{\varphi} + c'_t = 0. \quad (11)$$

Для виявлення координат забруднень не обов'язковим є розв'язання рівняння конвекції у повній мірі. Достатньо скористатись методом характеристик [4] стосовно (11) за умови наявності певної апріорної інформації про забруднення, а також побудованої гідродинамічної сітки і відповідної області комплексного квазіпотенціалу (у результаті розв'язання задачі (1), (7)-(10)).

Подібно до [1-3] ідентифікуватимемо джерела забруднень поточною $(x_t, y_t) \in \left\{ (\tilde{x}_t(\underline{\tau}), \tilde{y}_t(\underline{\tau})), 0 \leq \underline{\tau} < 1 \right\}$ ($t = \overline{1, I}$). В якості апріорних даних про домішкову речовину виступатиме інформація про час

$t = t_i^*$ ($t_i^* > 0$) руху забруднення та координати точок його виявлення (x_i^*, y_i^*) [3]. Нехай для спрощення $(x_i^*, y_i^*) \in CD$. Маючи гідродинамічну сітку неважко знайти значення функції течії ψ_i^* у (x_i^*, y_i^*) . Skorиставшись методом характеристик [4] стосовно (11) отримаємо інтегральне рівняння з невідомим квазіпотенціалом φ_i , що відповідає точці $(\underline{x}_i, \underline{y}_i)$ виникнення забруднення [3]

$$t_i^* = \int_{\varphi_i}^{\varphi_i^*} \frac{\kappa(\varphi, \psi_i^*) d\varphi}{v^2(\varphi, \psi_i^*)} = \sum_{L_{r,t} \in L_{\psi_i^*}} \int_{L_{r,t}} \frac{\kappa_r d\varphi}{v_r^2(\varphi, \psi_i^*)}, \quad (12)$$

де $\bigcup_r L_{r,t} \in L_{\psi_i^*}$, $\bigcup_{r_1, r_2} L_{r_1, t} \cap L_{r_2, t} = \emptyset$, $L_{\psi_i^*}$ – ділянка лінії течії $\psi = \psi_i^*$ від джерела забруднення $(x(\varphi_i, \psi_i^*), y(\varphi_i, \psi_i^*))$ до відповідної точки $(x(\varphi^*, \psi_i^*), y(\varphi^*, \psi_i^*))$ на виході

$$(L_{\psi_i^*} = (x(\varphi_i, \psi_i^*), y(\varphi_i, \psi_i^*)), (x(\varphi^*, \psi_i^*), y(\varphi^*, \psi_i^*))),$$

$$v_x = \frac{\kappa}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\kappa}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (13)$$

$$v^2(\varphi, \psi) = v_x^2(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) + v_y^2(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)),$$

$$c(\varphi, \psi, t) = u(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t).$$

Різницеві аналоги та алгоритм. Розв'язання задачі (1), (7)-(11) зручно здійснювати з використанням числового методу квазіконформних відображень [3, 5, 6]. Для цього вихідні сіткові області G_ω та G_z замінимо наближеними їх аналогами $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i \Delta\varphi, \quad \psi_j = j \Delta\psi; \quad \Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*) / (m+1), \quad \Delta\psi = Q / (n+1); i = \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{0, n+1}; \quad \gamma = \Delta\varphi / \Delta\psi; \quad m, n \in \mathbb{N}\}$ та $G_z^\gamma = \{(x_{i,j}, y_{i,j}) : x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad i = \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{0, n+1}, \quad (x_{i,j}, y_{i,j}) \in G_z\}$, відповідно [3, 5]. Тут γ – квазіконформний інваріант, $m \times n$ – кількості вузлів розбиття.

Наближені аналоги виразів (7), (9) та (10) отримується з використанням відповідних точково-різницевих представлень, однорідних консервативних різницевих схем другого порядку та лівих і правих різницевих схем першого порядку [5]. При цьому, усереднений розподіл модуля швидкості у смугах між лініями течій $\psi \in [\psi_i, \psi_{i+1}]$, де

є відомим, що розміщуються шукані джерела забруднень, запишемо з використанням виразу (13) та правих різницевих схем першого порядку у вигляді [3, 5]:

$$v_{i,t'} = \frac{\kappa_{i,t'} \sqrt{(x_{i,t'+1} - x_{i,t'})^2 + (y_{i,t'+1} - y_{i,t'})^2} \Delta\varphi}{(x_{i+1,t'} - x_{i,t'})(y_{i,t'+1} - y_{i,t'}) - (x_{i,t'+1} - x_{i,t'})(y_{i+1,t'} - y_{i,t'})}. \quad (14)$$

Тут $x_{i,t'} = x(\varphi_t, \psi_{t'})$, $y_{i,t'} = y(\varphi_t, \psi_{t'})$, $\kappa_{i,t'} = \kappa(x_{i,t'}, y_{i,t'})$, $t' = [\psi_t^* / \Delta\psi]$ ($t = \overline{1, I}$). Згідно [3] вираз (12) з урахуванням (14) у наближеному представленні можна звести до наступного вигляду:

$$t_i^* = \sum_{i=\underline{m}}^{m+1} \frac{(x_{i+1,t'} - x_{i,t'})(y_{i,t'+1} - y_{i,t'}) - (x_{i,t'+1} - x_{i,t'})(y_{t'+1,t'} - y_{i,t'})}{\Delta\psi}, \quad (15)$$

де $\varphi_{\underline{m}} \approx \varphi_t$ – квазіпотенціал у точці $(\underline{x}, \underline{y})$, \underline{m} – наперед невідоме.

Загальний алгоритм розв'язання задачі (1), (7)-(11) передбачає побудову гідродинамічної сітки та області комплексного квазіпотенціалу за допомогою числового методу квазіконформних відображень [3, 5], після чого – використання виразу (15) для ідентифікації джерел забруднень [3].

Спершу задаємо границю досліджуваної області G_ξ за допомогою опорних точок $(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_\xi)$ ($\xi = \overline{0, \bar{m}-1}$) для функцій $x = \tilde{x}(\tau)$ та $y = \tilde{y}(\tau)$. Відштовхуючись від апріорних даних формуємо параметри задання «ключових» точок $\tau_A, \tau_B, \tau_C, \tau_D$, квазіпотенціали φ_* , φ^* , коефіцієнт фільтрації $\kappa = \kappa(x, y)$ та кількості вузлів розбиття $m \times n$. Визначаємо координати розміщення «ключових» точок на границі G_ξ наступним чином: $A = (\tilde{x}(\tau_A), \tilde{y}(\tau_A))$, $B = (\tilde{x}(\tau_B), \tilde{y}(\tau_B))$, $C = (\tilde{x}(\tau_C), \tilde{y}(\tau_C))$, $D = (\tilde{x}(\tau_D), \tilde{y}(\tau_D))$. Обчислюємо крок $\Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*) / (m+1)$. Розв'язуємо задачу (1), (7)-(10), звідки, зокрема, отримуємо координати вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ ($i = \overline{0, m+1}$, $j = \overline{1, n}$) та крок $\Delta\psi$ ($\Delta\psi = Q / (n+1)$).

Задаємо точки, в яких виявлено забруднення $(x_t^*, y_t^*) \in CD$ ($t = \overline{1, I}$) та час t_t^* , за який домішкова речовина досягає (x_t^*, y_t^*) . Використовуючи розраховані раніше величини $(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})$ та $\Delta\psi$ обчислюємо значення функції течії ψ_t^* ($t = \overline{1, I}$), яке відповідає заданим точкам (x_t^*, y_t^*) [3]. Ітераційно підбираємо таке \underline{m} , при якому забезпечиться приблизна рівність лівої та правої частини формули (15). Остаточо, наприклад, з геометричних міркувань визначаємо координати шуканого джерела забруднення.

У випадку отримання результатів, що характеризуються досить великими нев'язками між розрахунковими та сталонними даними рекомендується збільшити густоту розбиття сітки чи використовувати точніші схеми наближення виразів (7), (10) та (12) [5]. Збільшення ж у розрахунках кількості точок, через які протікають забруднення, дозволить більш деталізовано ідентифікувати форму відповідного джерела. При цьому, обчислювальна складність може суттєво зрости до рівня, при якому доцільним стане виконання розпаралелення обчислень, наприклад, виду [8].

Числові експерименти. Для простоти викладок вважатимемо, що ділянки сталості коефіцієнта фільтрації є прямокутними

$$G_z = \{z \in G_z : \underline{x}_{\lfloor r/5 \rfloor/2} \leq x \leq \underline{x}_{\lfloor r/5 \rfloor/2+1}, \underline{y}_{\lfloor r/5 \rfloor} \leq y \leq \underline{y}_{\lfloor r/5 \rfloor+1}, r = \overline{0, s-1}\}.$$

З метою подальшої ідентифікації було розроблено спеціальну програму для імітації фізичних експериментів при наступних вхідних даних:

$$\begin{aligned} m &= 800, \quad n = 730, \quad \underline{x}_0 = 201,7025, \quad \underline{x}_1 = 277,6993, \quad \underline{x}_2 = 353,6961, \\ \underline{x}_3 &= 429,6929, \quad \underline{x}_4 = 505,6897, \quad \underline{x}_5 = 581,6866, \quad \underline{y}_0 = 160,6328, \\ \underline{y}_1 &= 242,992, \quad \underline{y}_2 = 325,3512, \quad \underline{y}_3 = 407,7104, \quad \underline{y}_4 = 490,0696, \\ \kappa_{19} &= 0,25, \quad \kappa_0 = \kappa_6 = \kappa_7 = \kappa_8 = \kappa_{10} = \kappa_{14} = \kappa_{15} = \kappa_{16} = \kappa_{17} = 1, \\ \kappa_5 &= 1,5, \quad \kappa_2 = \kappa_9 = \kappa_{12} = 2, \quad \kappa_1 = \kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_{11} = \kappa_{13} = \kappa_{18} = 3, \\ s &= 20, \quad \tilde{m} = 13, \quad (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (\tilde{x}_{12}, \tilde{y}_{12}) = (218,368), \quad (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (179,293), \\ (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) &= (256,277), \quad (\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) = (364,208), \quad (\tilde{x}_4, \tilde{y}_4) = (422,130), \\ (\tilde{x}_5, \tilde{y}_5) &= (591,240), \quad (\tilde{x}_6, \tilde{y}_6) = (583,430), \quad (\tilde{x}_7, \tilde{y}_7) = (494,447), \\ (\tilde{x}_8, \tilde{y}_8) &= (439,433), \quad (\tilde{x}_9, \tilde{y}_9) = (383,454), \quad (\tilde{x}_{10}, \tilde{y}_{10}) = (309,519), \\ (\tilde{x}_{11}, \tilde{y}_{11}) &= (247,437), \quad \tau_A = 0, \quad \tau_B = 0,902, \quad \tau_C = 0,4267, \end{aligned}$$

$$\tau_D = 0,3376, \quad \varphi_* = 0, \quad \varphi^* = 1,$$

$$\underline{x}_{t+1} = \tilde{x}_1(t\Delta \underline{\tau}_1) = 24t\Delta \underline{\tau}_1 \sin(12t\Delta \underline{\tau}_1) + 300, \quad t = \overline{0, 29},$$

$$\underline{x}_{t+31} = \tilde{x}_2(t\Delta \underline{\tau}_2) = 8\cos(10t\Delta \underline{\tau}_2) + 400, \quad t = \overline{0, 9},$$

$$\underline{x}_{t+41} = \tilde{x}_3(t\Delta \underline{\tau}_3) = 8\cos(10t\Delta \underline{\tau}_3) + 400, \quad t = \overline{0, 13},$$

$$\underline{x}_{t+55} = \tilde{x}_4(t\Delta \underline{\tau}_4) = 500, \quad t = \overline{0, 6},$$

$$\underline{y}_{t+1} = \tilde{y}_1(t\Delta \underline{\tau}_1) = 20\cos(12t\Delta \underline{\tau}_1) + 24t\Delta \underline{\tau}_1 + 300, \quad t = \overline{0, 29},$$

$$\underline{y}_{t+31} = \tilde{y}_2(t\Delta \underline{\tau}_2) = 32(t\Delta \underline{\tau}_2)^2 + 200, \quad t = \overline{0, 9},$$

$$\underline{y}_{t+41} = \tilde{y}_3(t\Delta \underline{\tau}_3) = -32(t\Delta \underline{\tau}_3)^2 + 400, \quad t = \overline{0, 13},$$

$$\underline{y}_{t+55} = \tilde{y}_4(t\Delta \underline{\tau}_4) = -60t\Delta \underline{\tau}_4 + 250, \quad t = \overline{0, 6},$$

$$\Delta \tau_1 = 1/30, \Delta \tau_2 = 0,1, \Delta \tau_3 = 14, \Delta \tau_4 = 7, I = 61.$$

У результаті отримано дані, наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Априорні дані про забруднення

x_i^*	y_i^*	t_i^*	x_i^*	y_i^*	t_i^*
500,79	187,52	66475,42	495,78	184,18	20052,91
500,74	187,48	66118,15	494,94	183,64	22497,46
500,39	187,25	64414,12	494,62	183,44	23967,93
499,76	186,82	61882,13	495,61	184,07	22894,74
498,90	186,24	59128,42	497,52	185,32	20515,49
497,92	185,58	56670,68	499,30	186,51	19025,43
497,00	184,97	55004,99	500,28	187,17	19516,87
496,29	184,51	54312,63	500,52	187,34	21568,88
495,94	184,29	54735,65	501,06	187,71	23293,01
496,05	184,36	56239,57	567,94	266,88	38644,41
496,60	184,72	58605,11	567,70	266,32	38989,62
497,49	185,30	61796,18	567,00	264,69	39831,84
498,56	186,01	65266,73	565,96	262,36	41065,66
499,63	186,73	68635,17	564,91	260,08	42009,46
500,78	187,51	71251,17	564,12	258,45	42316,76
502,83	188,94	69744,89	563,61	257,41	41759,94
504,18	189,90	67984,44	563,05	256,29	41102,94
504,45	190,09	66666,39	562,05	254,38	40712,55
503,45	189,38	65378,78	560,37	251,27	41321,14
503,04	189,09	62468,66	557,78	246,79	43064,95
502,27	188,55	59887,84	554,23	241,15	45554,26
501,09	187,73	58327,86	550,96	236,38	47564,13
499,73	186,79	57341,31	547,92	232,23	48952,86
498,47	185,95	57576,61	532,69	214,47	8205,03
497,61	185,38	59390,96	529,71	211,45	6732,26
497,31	185,18	62542,88	524,80	206,74	5460,82
497,59	185,36	66588,50	519,89	202,33	4233,84
498,33	185,85	71135,21	514,90	198,12	3077,89
499,34	186,53	74500,98	509,87	194,13	1991,04
501,21	187,81	76343,90	504,87	190,40	1035,37
496,17	184,44	18963,58			

Ідентифікація джерел забруднень здійснювалась за допомогою розробленого у роботі алгоритму при тих самих вхідних даних, що й у програмі імітації фізичного експерименту (за виключенням $(\underline{x}, \underline{y}_i)$ ($i = \overline{0, I}$)), при відомих (x_i^*, y_i^*) і t_i^* ($i = \overline{0, I}$) (див. табл. 1) та при різних варіантах розбиття (табл. 2) сітки. Такий підхід дозволяє оцінити

вплив розв'язку задачі фільтрації на точність ідентифікації. Також пораховано значення середніх $\bar{\varepsilon}$ та максимальних ε_{\max} нев'язок [3] апіорно відомих та розрахованих координат джерел забруднень.

Таблиця 2

Повні витрати і середні та максимальні нев'язки між еталонними та розрахованими значеннями координатам джерел забруднень при різних кількостях вузлів розбиття

m	n	Q	$\bar{\varepsilon}$	ε_{\max}
800	730	0,9213	0	0
400	366	0,9243	2,8102	5,8356
200	185	0,9333	5,8963	14,6172
100	94	0,9409	16,3227	41,7449
80	75	0,9406	20,5334	48,1645
40	37	0,9345	21,8443	47,1848
20	18	0,9174	24,9252	57,5078

Графічне представлення отриманого розв'язку, наприклад, для $m = 200$, $n = 185$ наведено на рис. 2. Як і очікувалось [3, 5], найбільші нев'язки між еталонними та розрахованими координатами джерел забруднень досягаються на ділянках, вплив на які мають великі значення похибок квазіконформності. А саме: точність ідентифікації суттєво негативно залежить від різкості стрибків коефіцієнта фільтрації, близькості до застійних зон і до граничних ліній течії (останні мають свої кінці в околах «ключових» точок на границі, де неприродно високими є значення градієнтів швидкості). Віддаль від точки спостереження до джерела забруднення, очевидно, також відіграє негативну роль.

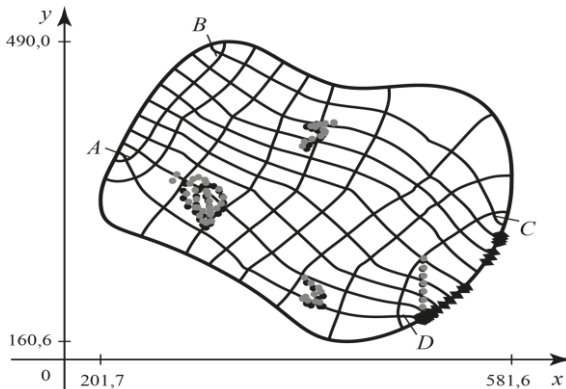


Рис. 2. Гідродинамічна сітка з розрахованими та еталонними координатами джерел забруднень (зображені, відповідно, сірим та чорним кольорами); ромбами позначено апіорно відомі заміри

Висновки. Перенесено підхід до ідентифікації імпульсних точкових джерел забруднень на випадок кусково-однорідного середовища за заданими координатами виявлення домішкової речовини та моментами часу її появи. Відповідний алгоритм передбачає числове моделювання руху частинок та використання методу характеристик щодо розв'язання рівняння конвекції.

У результаті проведення числових експериментів показано ефективність розробленого алгоритму. Найбільші нев'язки між апріорно відомими даними та розрахунковими виявлені в близькості тих ліній течії, які проходять через застійні зони чи зони великих градієнтів. Суттєві неточності також виникають на ділянках контакту середовищ із різними значеннями коефіцієнта фільтрації. Варто також врахувати, що інтегральне рівняння для ідентифікації джерел забруднень розв'язувалось за допомогою формули лівих прямокутників. Зменшити похибки розрахунків можливо за рахунок використання більш точних схем наближення використовуваних формул, збільшення кількості вузлів розбиття та задання додаткових умов на ділянках контакту середовищ з різними коефіцієнтами фільтрації.

У перспективі: врахування дифузійної складової [4], моделювання тонких включень виду [9], ідентифікація масштабніших, в порівнянні з точковими джерелами забруднень, перенесення алгоритму на простір та врахування множинності ділянок прикладання квазіпотенціалів [5].

Список використаних джерел:

1. Власюк А. П., Багнюк О. М. Знаходження невідомих параметрів джерела забруднення в одновимірних нестационарних задачах масопереносу. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. Вип. 11. С. 29-36.
2. Власюк А. П., Багнюк О. М. Ідентифікація місцеположення джерела забруднення в стаціонарній одновимірній задачі масоперенесення. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. Вип. 6. С. 40-48.
3. Бомба А. Я., Бойчура М. В., Багнюк О. М., Абдулалі А. А. Ідентифікація координат імпульсних джерел числовими методами квазіконформних відображень. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. Вип. 23. С. 20-30.
4. Бомба А. Я., Присяжнюк І. М., Присяжнюк О. В. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах: монографія. Рівне: НУВГП, 2017. 292 с.
5. Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошак С. В. Методи комплексного аналізу: монографія. Рівне: НУВГП, 2013. 415 с.
6. Бомба А. Я., Бойчура М. В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації: монографія. Рівне: НУВГП, 2020. 188 с.

7. Prautzsch H., Boehm W., Paluszny M. Bézier and B-Spline Techniques. Heidelberg: Springer, 2002. 304 p.
8. Vlasjuk A., Zhukovskyy V., Zhukovska N., Shatnyi S. Parallel computing optimization of two-dimensional mathematical modeling of contaminant migration in catalytic porous media. *Proceedings of the 2020 10th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)*, 16-18 September 2020, Deggendorf, Germany, 2020. P. 23-28.
9. Michuta O., Ivanchuk N., Martyniuk P., Ostapchuk O. A finite-element study of elastic filtration in soils with thin inclusions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5 (5). P. 41-48.

IDENTIFICATION OF COORDINATES OF IMPULSE SOURCES OF WASTEWATER POLLUTION IN PIECEWISE HOMOGENOUS MEDIA USING NUMERICAL QUASICONFORMAL MAPPING METHODS

The process of filtration in a single-connected curvilinear domain bounded by streamlines and equipotential lines is considered, provided that the medium under study is piecewise homogeneous. It is assumed that certain unknown curves act as impulse sources of pollution. It is assumed that their propagation occurs only due to the convective component, without significantly affecting the filtration background. It is proposed to use the method of characteristics for solving the convection equation to identify the coordinates of pollution sources. In this case, quasipotentials at the fluid inlet and outlet at the boundary of the domain, coordinates of the points of pollution detection, and the time of its movement downstream can serve as a priori data. The general algorithm involves the adaptation of the numerical quasiconformal mapping method to build a hydrodynamic mesh, according to which the coordinates of pollution sources are identified.

Numerical experiments were carried out and analysed. In particular, it is emphasised that with a sufficient mesh division, the maximum discrepancies between the a priori known data and the calculated data are small compared to the size of the studied domain. This indicates the effectiveness of the developed algorithm for identifying pollution sources in the case of a piecewise homogeneous environment. As an additional measure to reduce the magnitude of the uncertainties, it is proposed to use more accurate approximation schemes for specific expressions. On the other hand, there is an increase in computational complexity compared to the case of a continuous setting of the filtration coefficient.

Given the relatively high accuracy of the calculations, it seems advisable to further develop an described approach to larger-scale in comparison with point sources of pollution and to spatial case. Taking into account the sensitivity of the solutions to the discontinuity of the filtration coefficient values, it is also worthwhile to introduce additional conditions at the contact of homogeneous media in the future.

Key words: *mathematical modeling, piecewise conformal mappings, nonlinear problems, numerical methods, point source.*

Отримано: 31.08.2024