

specific implementation and can therefore be integrated into the developing recommendation system.

The research has practical significance, offering comprehensive solutions for optimizing the performance of software systems that can be applied in industrial high-load environments. Further research will focus on expanding the functionality of the recommendation system, integrating more complex optimization models, and conducting large-scale computational experiments to validate the results under real-world conditions.

Keywords: *performance, software applications, mathematical models, optimization methods, software implementation, recommendation system, decision tree.*

Отримано: 26.08.2024

УДК 536.2

DOI: 10.32626/2308-5916.2024-25.36-45

Р. С. Мусій, д-р. фіз.-мат. наук, професор,

М. І. Клапчук, канд. фіз.-мат. наук,

А. В. Кунинець, канд. фіз.-мат. наук,

І. Г. Свідрак, канд. техн. наук,

Р. Я. Пелех, аспірант

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА КОМП'ЮТЕРНИЙ АНАЛІЗ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОЇ ПАНЕЛІ ПРИ ІНДУКЦІЙНІЙ ТЕРМООБРОБЦІ

Розглядається електропровідна панель прямокутного поперечного перерізу. За індукційної термообробки квазіусталеним електромагнітним полем у ній виникають нестационарні об'ємно розподілені джерела тепла Джоуля. При відповідних параметрах зовнішнього електромагнітного поля теплові процеси в панелі можуть відбуватися в умовах приповерхневого або суцільного нагріву. Для дослідження закономірностей її теплових режимів за вищезазначених умов нагріву запропоновано двовимірну фізико-математичну модель. Дана модель складається з двох етапів. На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначається дотична до основ панелі компонента вектора напруженості магнітного поля. На другому етапі за знайденою цією компонентою знаходиться тепло Джоуля. Для побудови розв'язку задачі електродинаміки використано апроксимацію розподілу дотичної до основ панелі компоненти вектора напруженості магнітного поля по товщинній координаті кубічним поліномом. Коефіцієнти апроксимаційного полінома подаються у вигляді лінійної комбінації інтегральних за тов-

щинною координатою характеристик дотичної компоненти вектора напруженості магнітного поля та заданих крайових значень цієї компоненти на основах панелі. У результаті вихідна двовимірною початково-крайова задача на визначальну функцію (розглядувану компоненту) зводиться до одновимірної початково-крайової задачі на інтегральні характеристики визначальної функції. Розв'язки цієї задачі знаходяться застосуванням скінченного інтегрального перетворення по поперечній координаті панелі з використанням заданих крайових умов на визначальну функцію на торцевих перетинах панелі та перетворення Лапласа за часовою змінною.

Числові дослідження виконано для мідної панелі при її індукційній термообробці однорідним квазіусталеним електромагнітним полем. Чисельно проаналізовано теплові режими панелі залежно від параметру, що характеризує відносну глибину проникання індукційних струмів для двох характерних випадків приповерхневого та суцільного нагріву.

Ключові слова: *індукційна термообробка, квазіусталене електромагнітне поле, мідна панель, тепло Джоуля, приповерхневий та суцільний нагрів.*

Вступ. Актуальним завданням для розвитку нових галузей промисловості є впровадження ефективних, екологічних та енергоефективних технологій. Серед цих технологій важливе місце займає індукційна термообробка електропровідних елементів конструкцій. Її широке застосування в промисловості базується на екологічних перевагах та низьких матеріало- та енергетичних затратах.

Фізичні основи індукційного нагріву, його теоретичні засади та переваги щодо використання в сучасних технологічних процесах детально проаналізовані у роботах [1, с. 57-81, 2, с. 80-88, с. 300-324]. Викладено головні засади електротеплотехніки та технологічного індукційного нагріву, що дозволяє отримати глибше розуміння сутності процесу. Фізичні моделі та чисельно-експериментальні підходи до нагрівання електропровідних матеріалів вихровими струмами, індуктованими змінним електромагнітним полем (ЕМП), розглянуті у роботі [3, с. 51-64]. Математичні моделі та закономірності термомеханічної поведінки неферромагнітних електропровідних тіл з плоскопаралельними границями за дії імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди характерних типів розглянуто в праці [4, с. 38-200].

Електропровідні, зокрема мідні, панелі є конструктивними елементами багатьох сучасних промислових пристроїв, а саме генераторів, трансформаторів, магнітопроводів двигунів, котушок індуктивності тощо. У процесі функціонування таких пристроїв на їх елементи можуть впливати нестационарні ЕМП таких типів: усталені, квазіусталені, неусталені та імпульсні. При цьому мідні панелі часто зазнають впливу зовнішніх ква-

зіусталених ЕМП, дія яких зумовлює виникнення в них нестационарних об'ємно розподілених джерел тепла Джоуля. Врахування такого додаткового теплового фактору, як тепло Джоуля, набуває особливого значення для прогнозування роботоздатності та надійності експлуатації мідних панелей як конструктивних елементів.

У літературі, як правило, розглянуто розрахунки тепла Джоуля, зумовленого нестационарними ЕМП різних типів в одновимірних тілах. У роботах [5, 6] проаналізовано теплові режими в однорідній та двошаровій електропровідних пластинах за короткочасного індукційного нагріву неусталеним ЕМП на основі одновимірної фізико-математичної моделі. Однак, для більш повного аналізу тепла Джоуля у електропровідних панелях прямокутного поперечного перерізу, які є важливими елементами конструкцій відповідних електротехнічних пристроїв, необхідне використання двовимірної фізико-математичної моделі.

У даній роботі розглянуто таку модель для визначення компонент векторів напруженостей магнітного та електричного полів, а також питомої густини тепла Джоуля у електропровідній панелі прямокутного перерізу за однорідної дії нестационарного ЕМП. На основі запропонованої моделі проведено комп'ютерний аналіз теплових режимів розглядуваної панелі за умов приповерхневого та суцільного індукційного нагріву однорідним квазіусталеним ЕМП.

Формулювання та вихідні співвідношення двовимірної фізико-математичної моделі. Розглядається електропровідна панель прямокутного перерізу, віднесена до Декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 1). Початок системи точка O співпадає з центром симетрії прямокутника (точкою перетину його діагоналей). Для термообробки електропровідна панель індукційно нагрівається зовнішнім квазіусталеним ЕМП. Відповідно до явища електромагнітної індукції у панелі виникають індукційні струми, які зумовлюють нагрів панелі теплом Джоуля.

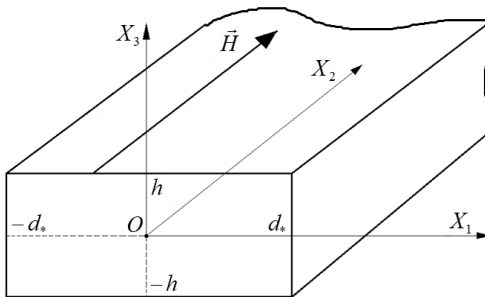


Рис. 1. Електропровідна панель прямокутного поперечного перерізу

Панель виготовлена з однорідного, ізотропного і неферомагнітного матеріалу. Електрофізичні параметри матеріалу вважаються

сталими і дорівнюють їх середнім значенням на відповідних інтервалах нагріву.

Вздовж осі Ox_1 відкладається ширина панелі, вздовж осі Ox_2 – довжина панелі, а вздовж осі Ox_3 – товщина. Панель безмежно довга. Її прямокутний поперечний переріз має товщину $2h$ і шириною $2d_*$, де h – півтовщина панелі. Віднесемо Декартові координати x_1, x_3 до величини h . Надалі будемо розглядати безрозмірні координати $X_1 = x_1/h$, $X_3 = x_3/h$.

Для дослідження закономірностей процесів теплового нагріву панелі сформулюємо двовимірну фізико-математичну модель. Ця модель складається з двох етапів.

На першому етапі на основі співвідношень Максвелла визначаємо вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}(x_1, x_3, t) = \{0; H_2(x_1, x_3, t); 0\}$. Компонента $H_2(x_1, x_3, t)$ паралельна до всіх чотирьох граней панелі, які описуються виразами: $x_3 = \pm 1$, $x_1 = \pm d$. Тут t – час, $d = d_*/h$ – безрозмірна ширина панелі.

Для визначення компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ у розглядуваній панелі на основі співвідношень Максвелла отримуємо рівняння:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) H_2 - \frac{\partial H_2}{\partial \tau} = 0. \quad (1)$$

Тут $\tau = t / (\sigma \mu h^2)$ – безрозмірний час, характерний для дифузії магнітного поля через півтовщину h панелі; σ – коефіцієнт електропровідності, μ – магнітна проникливість матеріалу панелі.

Дії зовнішнього квазіусталеного ЕМП задається значеннями компоненти $H_2(x_1, x_3, t)$ на всіх гранях панелі. Граничні умови для розв'язування рівняння (1) записуються виразами:

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau), \quad H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau). \quad (2)$$

Тут $H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau)$ і $H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau)$ задані вирази функції $H_2(x_1, x_3, \tau)$ на гранях $x_3 = \pm 1$, $x_1 = \pm d$ панелі.

За відсутності ЕМП у панелі в початковий момент часу $\tau = 0$ початкова умова на функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ має вигляд:

$$H_2(x_1, x_3, 0) = 0. \quad (3)$$

Необхідно, щоб у кутових точках поперечного перерізу панелі крім граничних умов (2) також виконувались умови узгодження функцій $H_2^{\pm(0)}$ і $H_2^{\pm(0)*}$. Ці умови записуються у вигляді:

$$\begin{aligned}
 H_2^{+(0)}(d, \tau) &= H_2^{+(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(d, \tau) = H_2^{-(0)*}(-1, \tau), \\
 H_2^{+(0)}(-d, \tau) &= H_2^{-(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(-d, \tau) = H_2^{+(0)*}(-1, \tau).
 \end{aligned} \quad (4)$$

На другому етапі за знайденою функцією $H_2(x_1, x_3, \tau)$ визначаємо вектор напруженості електричного поля у панелі на основі співвідношення

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} (\text{rot } \vec{H}). \quad (5)$$

Вектор напруженості електричного поля \vec{E} , згідно структури вектора напруженості магнітного поля \vec{H} , має дві відмінні від нуля компоненти, тобто $\vec{E}(x_1, x_3, \tau) = \{E_1(x_1, x_3, \tau); 0; E_3(x_1, x_3, \tau)\}$.

Ці компоненти через функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ описуються виразами:

$$E_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_3}, \quad E_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_1}. \quad (6)$$

За знайденим виразом вектора \vec{E} напруженості електричного поля тепло Джоуля описується формулою

$$Q = \sigma \vec{E} \vec{E}. \quad (7)$$

Відповідно до формули (7) вираз тепла Джоуля через функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ подається формулою:

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left[\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Побудова розв'язку за індукційного нагріву однорідним квазіусталеним ЕМП. Приймаємо, що індукційна термообробка електропровідної панелі здійснюється однорідним квазіусталеним ЕМП. За такої електромагнітної дії значення компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора напруженості магнітного поля \vec{H} на бічних гранях $x_3 = \pm 1$ та $x_1 = \pm d$ панелі задаються виразами:

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_0 \varphi(\tau) e^{ib\tau}, \quad H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_0 \varphi(\tau) e^{ib\tau}. \quad (9)$$

Зауважимо, що при такій структурі умов (9) умови (4) узгоджені значень компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора напруженості магнітного поля \vec{H} у кутових точках прямокутного поперечного перерізу, тобто на ребрах панелі, виконуються тотожно.

У виразах (9) функція $\varphi(\tau)$ описує вихід електромагнітних коливань частоти ω на усталений синусоїдальний режим зі сталою амплітудою H_0 напруженості магнітного поля. Вона задовольняє відомим умовам квазіусталеності ЕМП і має вигляд:

$$\varphi(\tau) = 1 - e^{\beta\tau}. \quad (10)$$

У виразах (9) $i = \sqrt{-1}$; $b = 1 / \left(2\delta_0^2 \right)$. Тут $\delta_0 = \left(2\omega\sigma\mu h^2 \right)^{-1/2}$ – параметр, що визначає відносну до півтовщини панелі h глибину проникання індукційних струмів частоти ω . У виразі (10) параметр $\beta = \ln \varepsilon / \tau_*$, де τ_* – безрозмірний час, що відповідає виходу електромагнітних коливань частоти ω на усталений режим з амплітудою H_0 ; $\varepsilon = 0.001$.

Розв'язок двовимірної початково-крайової задачі (1)-(4) знаходимо з використанням апроксимації розподілу функції $H_2(x_1, x_3, \tau)$ по товщинній координаті x_3 кубічним поліномом. У результаті вихідна двовимірна початково-крайова задача на функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ зводиться до одновимірної початково-крайової задачі на інтегральні характеристики цієї функції. Система рівнянь на інтегральні характеристики розв'язується з використанням скінченного інтегрального перетворення по змінній x_1 згідно заданих крайових умов (2) на торцевих $x_1 = \pm d$ перетинах панелі та інтегрального перетворення Лапласа за часом τ з використанням початкової умови (3).

Після знаходження функції H_2 з використанням формул (7), (8) записуємо вираз питомої густини тепла Джоуля Q як функції від змінних x_1, x_3, τ .

Відповідно до крайових умов (9) вираз для питомої густини тепла Джоуля Q , усередненого за період електромагнітних коливань квазіусталеного ЕМП, має вигляд:

$$Q(x_1, x_3, \tau) = \frac{1}{2} \sigma \varphi^2(\tau) \vec{E} \vec{E}^{\sim}. \quad (11)$$

Тут \vec{E}^{\sim} – комплексно спряжений вираз до виразу вектора напруженості електричного поля \vec{E} .

Числовий аналіз теплових режимів мідної електропровідної панелі. Дослідження виконано для мідної електропровідної панелі товщиною $2h = 2\text{mm}$ і шириною $2d_* = 20\text{mm}$. Тобто $d = 10$. Проведено чисельні експерименти для індукційного нагріву мідної панелі квазіусталеним ЕМП для двох значень параметра δ_0 : $\delta_0 = 0.1$ (приповерхневий індукційний нагрів) та $\delta_0 = 1$ (суцільний індукційний нагрів). Кругова частота електромагнітних коливань у першому випадку $\omega_1 = 6.7 \cdot 10^5 \text{1/s}$ відповідає радіочастотному діапазону, а у другому випадку частота

$\omega_2 = 6.7 \cdot 10^3$ 1/s відповідає діапазону промислових частот для суцільного індукційного нагріву електропровідних елементів.

Результати обчислень представлені на рис. 2-5. На рис. 2, 3 приведено залежності тепла Джоуля Q/H_0^2 від безрозмірного часу τ у характерних точках $M_1(0.25d, 0.25)$, $M_2(0.5d, 0.5)$, $M_3(0.9d, 0.9)$ поперечного перерізу панелі. Рис. 2 відповідає значенню параметра $\delta_0 = 0.1$, а рис. 3 – значенню параметра $\delta_0 = 1$. Як бачимо з цих графіків, часова залежність тепла Джоуля Q/H_0^2 за індукційного нагріву квазіусталеним ЕМП відповідає характеру зміни функції $\varphi^2(\tau)$.

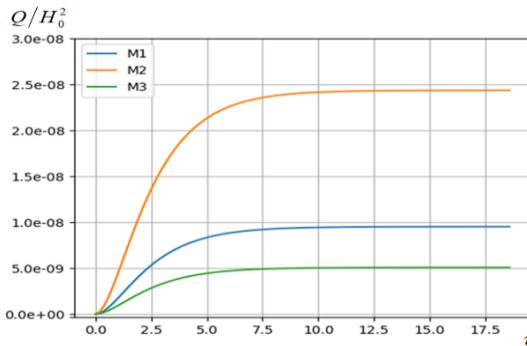


Рис. 2. Залежність тепла Джоуля Q/H_0^2 від безрозмірного часу τ у характерних точках M_1 – M_3 поперечного перерізу мідної панелі у випадку приповерхневого індукційного нагріву (параметр $\delta_0 = 0.1$)

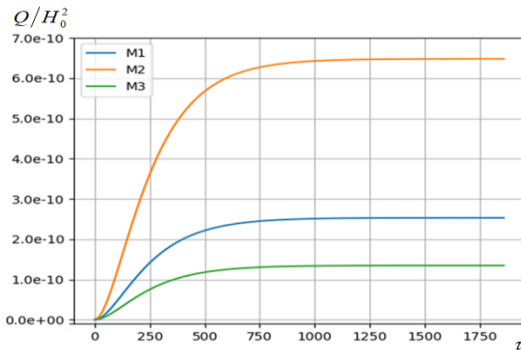


Рис. 3. Залежність тепла Джоуля Q/H_0^2 від безрозмірного часу τ у характерних точках M_1 – M_3 поперечного перерізу мідної панелі у випадку суцільного індукційного нагріву (параметр $\delta_0 = 1$)

На основі аналізу залежностей, приведених на рис. 2 і рис. 3, встановлено, що вихід на усталений режим індукційного нагріву розглядуваної мідної панелі (досягнення максимальних значень тепла Джоуля) відбувається у випадку приповерхневого нагріву в моменти безрозмірного часу $\tau \geq 10$, а у випадку суцільного нагріву в моменти безрозмірного часу $\tau \geq 1000$.

Розподіл тепла Джоуля Q/H_0^2 по площі поперечного перерізу мідної панелі в момент часу $\tau = 10$ при $\delta_0 = 0.1$ зображено 3d-графіком на рис. 4, а в момент часу $\tau = 1000$ при $\delta_0 = 1$ – 3d-графіком на рис. 5.

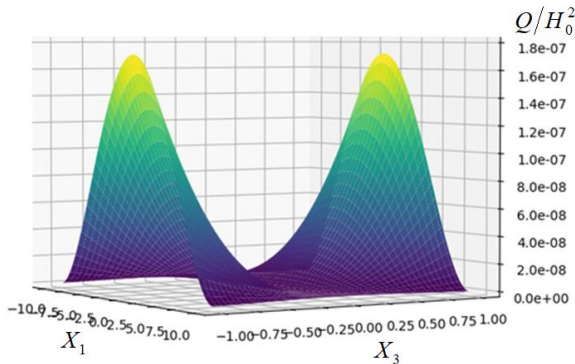


Рис. 4. Розподіл тепла Джоуля Q/H_0^2 по площі поперечного перерізу мідної панелі в момент часу $\tau \geq 10$ при $\delta_0 = 0.1$ (приповерхневий індукційний нагрів)

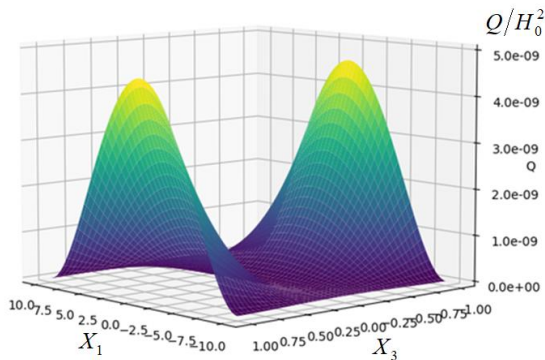


Рис. 5. Розподіл тепла Джоуля Q/H_0^2 по площі поперечного перерізу мідної панелі в момент часу $\tau \geq 1000$ при $\delta_0 = 1$ (суцільний індукційний нагрів)

На основі аналізу 3d-графіків, поданих на рис. 4, 5 встановлено, що в установленому режимі індукційного нагріву розподіл тепла Джоуля Q/H_0^2 по площі поперечного перерізу мідної панелі має однаковий якісний характер в обох розглядуваних режимах індукційного нагріву. Отримано, що максимальні числові значення тепла Джоуля Q/H_0^2 у випадку приповерхневого індукційного нагріву приблизно у 40 разів більші за такі самі значення у випадку суцільного індукційного нагріву.

Висновки. На основі виконаного числового аналізу тепла Джоуля виявлено такі нові закономірності:

- 1) при наближенні до кутових точок прямокутника поперечного перерізу панелі значення тепла Джоуля Q/H_0^2 зростають як у випадку приповерхневого, так і у випадку суцільного індукційного нагріву;
- 2) у випадку приповерхневого індукційного нагріву тепло Джоуля виходить на усталений режим в момент часу $\tau \geq 10$, а у випадку суцільного індукційного нагріву – в момент часу $\tau \geq 1000$ за однакової кругової частоти електромагнітних коливань;
- 3) при зростанні параметра δ_0 у 10 разів безрозмірний час τ виходу тепла Джоуля на усталений режим індукційного нагріву зростає у 100 разів;
- 4) максимальні значення тепла Джоуля Q/H_0^2 зі збільшенням величини H_0 за обох розглядуваних режимів індукційного нагріву зростають за квадратичним законом.

Виявлені закономірності зміни в часі та розподілу по поперечному перерізу мідної панелі тепла Джоуля мають важливе теоретичне і прикладне значення для прогнозування теплових режимів та роботоздатності мідних пластинчастих елементів при їх технологічній обробці з допомогою індукційного нагріву квазіусталеним ЕМП.

Список використаних джерел:

1. Lupi S. Fundamentals of Electroheat, Electrical Technologies for Process Heating; Springer: Cham, Switzerland, 2017. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-46015-4>.
2. Rudnev V., Loveless D., Cook R. Handbook of Induction Heating; CRC Press: London, UK; Taylor and Francis Group: Abingdon, UK, 2018.
3. Bobart G. F. Induction heating. AccessScience. 2020. URL: <https://www.accessscience.com/content/article/a341500>.
4. Гачкевич О. Р., Мусій Р. С., Тарлаковський Д. В. Термомеханіка неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. Львів: Сполом, 2011. 211 с.
5. Musii R., Pukach P., Kohut I., Vovk M., Šlahor, E. Determination and Analysis of Joule's Heat and Temperature in an Electrically Conductive Plate Element Subject

- to Short-Term Induction Heating by a Non-Stationary Electromagnetic Field. *Energies*. 2022. Vol. 15. URL: <https://doi.org/10.3390/en15145250>.
6. Musii R., Pukach P., Melnyk N., Vovk M., Šlahor, L. Modeling of the Temperature Regimes in a Layered Bimetallic Plate under Short-Term Induction Heating. *Energies*. 2023. Vol. 16. URL: <https://doi.org/10.3390/en16134980>.

MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTER ANALYSIS OF THERMAL MODES OF AN ELECTRICALLY CONDUCTIVE PANEL DURING INDUCTION HEAT TREATMENT

An electrically conductive panel of rectangular cross-section is considered. During induction heat treatment with a quasi-steady electromagnetic field, unsteady volumetrically distributed Joule heat sources arise in it. With appropriate parameters of the external electromagnetic field, thermal processes in the panel can occur under conditions of near-surface or continuous heating. A two-dimensional physical and mathematical model is proposed to study the regularities of its thermal modes under the above-mentioned heating conditions. This model consists of two stages. At the first stage, the component of the magnetic field intensity vector tangent to the panel bases is determined from Maxwell's relations. At the second stage, the Joule heat is calculated from this component. To construct a solution to the electrodynamics problem, we use a cubic polynomial approximation of the distribution of the magnetic field intensity vector component tangent to the panel bases along the thickness coordinate. The coefficients of the approximation polynomial are represented as a linear combination of the thickness-integral characteristics of the tangential component of the magnetic field intensity vector and the specified boundary values of this component on the panel bases.

As a result, the original two-dimensional initial-boundary value problem on the determining function (the component under consideration) is reduced to a one-dimensional initial-boundary value problem on the integral characteristics of the determining function. The solutions to this problem are found by applying a finite integral transformation along the transverse coordinate of the panel using the given boundary conditions on the determining function at the end sections of the panel and the Laplace transform in the time variable.

Numerical studies have been performed for a copper panel during its induction heat treatment with a homogeneous quasi-steady-state electromagnetic field. The thermal modes of the panel are analyzed numerically depending on the parameter characterizing the relative depth of induction current penetration for two typical cases of near-surface and continuous heating.

Keywords: *induction heat treatment, quasi-steady-state electromagnetic field, copper panel, Joule heat, surface and continuous heating.*

Отримано: 16.09.2024