

УДК 621.391.8

DOI: 10.32626/2308-5916.2024-26.19-42

В. В. Палагін, д-р техн. наук, професор,

Д. О. Смірнов

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

СТАТИСТИКИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ В ЗАДАЧАХ ВИЯВЛЕННЯ СИГНАЛІВ НА ФОНІ КОРЕЛЬОВАНИХ НЕГАУСОВИХ ЗАВАД

Задачі виявлення сигналів на фоні завад є актуальними в телекомунікаційних системах, системах навігації та радіолокації, при обробці зображень та біомедичних дослідженнях, де завади часто не підпорядковуються нормальному розподілу, а вибіркові значення є статистично залежними. Традиційні методи аналізу та проектування таких систем стикаються з істотними обмеженнями, які супроводжується алгоритмічною та обчислювальною складністю, що суттєво звужує їх практичне застосування.

Ефективний підхід до розробки систем виявлення сигналів передбачає використання моментного та кумулянтного опису випадкових величин, що спрощує синтез систем виявлення сигналів із різними щільностями розподілів. Автори роботи пропонують новий підхід, який ґрунтується на застосуванні одновимірних (1D) та двовимірних (2D) моментно-кумулянтних моделей для опису корельованих негаусових процесів, що дозволило модифікувати моментний критерій якості перевірки статистичних гіпотез та синтезувати поліноміальні стохастичні розв'язувальні правила виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад.

Дослідження показали, що нелінійна обробка вибірових значень та застосування статистик вищих порядків для опису досліджуваних процесів дозволяє врахувати структуру негаусових завад та їх статистичні зв'язки, що знижує ймовірність помилок синтезованих розв'язувальних правил у порівнянні з традиційними гаусовими моделями.

Метою роботи є підвищення ефективності систем виявлення сигналів при адитивній взаємодії із корельованими негаусовими завадами шляхом розробки нових моментно-кумулянтних моделей досліджуваних процесів, модифікації моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез та розробки поліноміальних розв'язувальних правил.

Практичне значення роботи полягає у створенні нескладних для реалізації алгоритмів із високою точністю, що забезпечують меншу ймовірність помилок розв'язувальних правил у порівнянні з відомими результатами.

Ключові слова: *комп'ютерне та математичне моделювання, негаусові корельовані процеси, статистики вищих по-*

рядків, моментий критерій якості перевірки статистичних гіпотез, поліноміальні алгоритми виявлення сигналів, інформаційні технології

Вступ. Розробка інноваційних систем виявлення сигналів має ключове значення для створення й удосконалення телекомунікаційних систем, систем навігації та радіолокації, систем управління тощо [1-3]. У процесі проектування таких систем необхідно враховувати випадковий характер розподілу сигналів, що формується під впливом різних типів завад. Для розв'язання цієї задачі широко застосовуються класичні підходи теорії перевірки статистичних гіпотез, які дозволяють використовувати різноманітні щільності розподілу випадкових процесів [4, 5]. На практиці найбільш поширеною є математична модель нормального розподілу випадкових величин, яка найчастіше використовується для реалізації таких систем. Однак у багатьох реальних ситуаціях обробки випадкових процесів таке припущення не забезпечує необхідної точності обробки сигналів. Вплив дестабілізуючих чинників, багатопроменеве поширення сигналів, неоднорідність середовищ передачі та флуктуації параметрів каналів зв'язку створюють складну сигнально-завадову ситуацію, що описується негаусовими випадковими процесами [6]. Традиційні методи аналізу та проектування систем обробки таких процесів стикаються з істотними обмеженнями, зумовленими труднощами їх алгоритмічної реалізації. Додаткові ускладнення виникають у випадках, коли випадкові процеси є корельованими негаусовими величинами [5, 6]. Також слід враховувати, що обмежений діапазон спостережень може призводити до неможливості ігнорування статистичних залежностей між значеннями випадкової величини.

Один із підходів до розв'язання поставленої задачі полягає у використанні функції щільності ймовірності для опису випадкових процесів. Запропоновано метод, який базується на пороговій системі виявлення детермінованого сигналу в умовах незалежного негаусового шуму, де функції щільності ймовірності є невідомими, проте вони характеризуються симетричністю та унімодалльністю [7]. Ефективність цього методу продемонстрована шляхом аналізу великої кількості вибіркового значень за умов слабкого сигналу. Для визначених функцій щільності ймовірності в кореляційному детекторі з заданими обмеженнями розглянуто різні методи обробки сигналу [8]. Запропоновані інші підходи, які базуються на принципі надпорогового стохастичного резонансу і включають застосування узгодженого фільтра для розв'язання поставленої задачі [9]. У роботі [10] описано структуру субоптимального детектора з паралельним масивом двокаскадних квантувачів, що працюють на фоні негаусових завад. Разом з тим необхідно відмітити, що не дивлячись на те, що функції щільності ймовірності нада-

ють детальний опис досліджуваними випадковими процесам, їх використання часто обмежене і супроводжується алгоритмічною та обчислювальною складністю, що суттєво обмежує їх практичне застосування.

В літературі розглядається інший підхід до опису випадкових процесів, який базується на таких характеристиках розв'язувальних правил, як дисперсія та середнє значення. Наприклад, у класі лінійно-квадратичних ($L-Q$) систем запропоновано критерій відхилення [11, 12]. Разом з тим такий підхід не отримав свого широкого розвитку та має слабкий зв'язок з добре відомими класичними критеріями якості перевірки статистичних гіпотез, що ускладнює повне розкриття властивостей його застосування.

У дослідженні запропоновано альтернативний підхід, який використовує моментно-кумулянтний опис випадкових процесів та статистики вищих порядків (HOS – Higher-Order Statistics). Такий підхід суттєво спрощує представлення випадкових негаусових процесів та дозволяє врахувати їх кореляційні зв'язки.

Метою роботи є вдосконалення систем виявлення сигналів в умовах адитивної взаємодії з корельованими негаусовими завадами. Це досягається через розробку нових моментно-кумулянтних моделей для опису випадкових величин, синтез поліноміальних розв'язувальних правил, оптимальних за модифікованим моментним критерієм якості перевірки статистичних гіпотез, що дає можливість для створення ефективних методів і комп'ютерних засобів обробки сигналів в складних заводських умовах.

1. Математичні моделі корельованих негаусових процесів на основі статистик вищих порядків. Корельовані негаусові процеси, які розглядаються в дослідженні, виходять за рамки нормального розподілу і включають складні статистичні зв'язки. Для опису таких процесів використовують різноманітні математичні моделі, здатні відобразити як кореляційну структуру, так і асиметрію або ексцес розподілу. До ключових методів опису таких процесів належать як багатомірні PDF (Probability Density Function), так і моментно-кумулянтні моделі на основі статистик вищих порядків (Higher-Order Statistics), які дозволяють відобразити не лише середнє значення та дисперсію, але й більш складніші статистичні характеристики [13-15].

Багатовимірна функція щільності ймовірності (MD PDF – MultiDimensional Probability Density Function) є загальним математичним представленням статистично залежного випадкового процесу $\zeta(t)$. Наприклад, MD PDF використовується для опису залежностей між кількома випадковими величинами, таких як у багатовимірному нормальному розподілі, який є поширеним прикладом багатовимірної щільності ймовірності:

$$f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{X}^T |\Sigma|^{-1} \mathbf{X}\right),$$

де Σ – матриця коваріацій між випадковими величинами, \mathbf{X} – вектор значень цих величин.

MD PDF використовується для моделювання залежностей між різними параметрами сигналів. У таких випадках, де сигнали можуть бути корельованими або взаємодіяти з негаусовими завадами, MD PDF дозволяє точніше оцінити ймовірність наявності сигналу та його параметри в умовах шуму.

Разом з тим, математичні моделі опису випадкових процесів на основі MD PDF мають ряд обмежень в своєму практичному застосуванні. Наприклад, MD PDF не завжди може бути відома і можуть виникнути деякі труднощі з оцінкою її параметрів $(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_n)$, вимагає високої обчислювальної складності, особливо для великих вимірів.

Альтернативний підхід до опису корельованих негаусових процесів, який заснований на моментно-кумулянтному представленні, дозволяє гнучко враховувати статистичну залежність між випадковими величинами, що значно розширює можливості класичних методів обробки сигналів. Зокрема, такий підхід надає змогу описувати складні та нелінійні взаємодії між сигналами, а також враховувати особливості розподілу, які не можна повністю охарактеризувати гаусовими моделями.

Розглянемо представлення одновимірних (1D) та двовимірних (2D) PDF через моментно-кумулянтний опис випадкових процесів [16]. 1D моменти m_i порядку i випадкової величини ξ визначаються за допомогою PDF $p(\xi)$:

$$m_i = E(\xi^i) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^i p(\xi) dx.$$

MD PDF може представляти статистично залежні випадкові величини [16]. При розв'язанні практичних задач важливою характеристикою, яка описує статистичний зв'язок між двома випадковими величинами, є двовимірний ймовірнісний розподіл. У цьому контексті випадкову величину з будь-яким статистичним зв'язком вибіркового значень можна характеризувати не тільки одновимірними, а й сумісними кумулянтами, які виражаються через сумісні моменти [16, 17]:

$$E(\xi_1^i \xi_2^j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1^i \xi_2^j p(\xi_1, \xi_2) dx.$$

Уявімо вибіркові значення стаціонарного випадкового процесу, які розглядаються як окремі випадкові величини. На практиці типовим

прикладом статистично залежних значень є співвідношення між двома випадковими величинами і для їх опису можна застосувати 2D PDF. Розглянемо ситуацію з двома незалежними випадковими змінними ξ і η , які мають функції щільності ймовірності p_ξ і p_η відповідно. Тоді початкові моменти порядку i записуються у наступному вигляді:

$$m_i^{(\xi)} = E\xi^i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i p_\xi(x) dx, \quad m_i^{(\eta)} = E\eta^i = \int_{-\infty}^{+\infty} y^i p_\eta(y) dy.$$

Для негаусових статистично незалежних випадкових величин (із нульовим середнім значенням і дисперсією χ_2) залежність між початковими моментами m_i та кумулянтами χ_i до четвертого порядку описується наступним чином [14]:

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \chi_2, \quad m_3 = \chi_3, \quad m_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2,$$

де для гаусових процесів кумулянтні коефіцієнти третього та вищих порядків (χ_3, χ_4, \dots) дорівнюють нулю.

Якщо випадкові величини ξ і η є статистично залежними, тоді окрім початкових моментів вони мають також змішані (сумісні) моменти різних порядків.

Визначення 1. Сумісним моментом двох випадкових величин ξ і η розмірності (ij) будемо називати величину, що дорівнює математичному сподіванню добутку i -го степеня випадкової величини ξ та j -го степеня випадкової величини η :

$$m_{ij}^{(\xi, \eta)} = E\xi^i \eta^j = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i y^j p(x, y) dx dy,$$

де $p(x, y)$ – сумісний розподіл випадкових величин ξ та η .

Для опису статистичного зв'язку між вибірковими значеннями будуть використані сумісні моменти m_{ij} та кумулянти χ_{ij} розмірності (ij) до четвертого порядку включно, які мають наступні співвідношення [17]:

$$m_{11} = \chi_{11}, \quad m_{12} = \chi_{12}, \quad m_{13} = \chi_{13} + 3\chi_2\chi_{11}, \quad m_{22} = \chi_{22} + \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2.$$

Очевидно, що аналогічно можна визначити сумісні моменти для трьох і більше випадкових величин, що дозволяє досліджувати більш складні кореляційні залежності.

Відмінність від нуля сумісних кумулянтів χ_{ij} характеризує випадковий досліджуваний процес як статистично залежний. Окрім того, сумісні моменти та кумулянти характеризуються зв'язками, які

подібні до зв'язків при дослідженні одновимірних випадкових величин. Наприклад, сумісний кумулянт другого порядку χ_{11} або коваріація характеризує статистичний зв'язок першого порядку або так звану корельованість випадкових величин:

$$\chi_{11} = m_{\xi_1} - m_{\xi_1} m_{\xi_2},$$

де m_{ξ_1} і m_{ξ_2} – математичне сподівання випадкових величин ξ_1 та ξ_2 відповідно.

Кумулянти при розкладі характеристичної функції в ряд можна класифікувати за певними класами. Ця категорія описує PDF зі спільними властивостями. Цей тип класифікації для негаусових випадкових величин називається **перфорованими** випадковими величинами [14]. В цій класифікації моментні та кумулянтні моделі представлені лише частиною кумулянтів з усіх можливих наборів, які відповідають реальному процесу.

Відповідно до прийнятої класифікації розрізняють різні типи *асиметричних, ексцесних і асиметрично-ексцесних* випадкових негаусових величин, дослідження яких проводилися в [14].

Визначення 2. Гаусовими корельованими випадковими величинами будуть вважатися такі, які характеризуються відмінними від нуля одновимірним χ_2 і сумісним χ_{11} кумулянтами другого порядку, а решта кумулянтних коефіцієнтів третього та вище порядків, а також сумісні кумулянти вище другого порядку дорівнюють нулю. Тоді початкові моменти α_i для гаусової статистично залежної випадкової величини до шостого порядку запишуться через кумулянти χ_i як:

$$\alpha_1 = \chi_1, \quad \alpha_2 = \chi_2, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 3\chi_2^2, \quad \alpha_5 = 0, \quad \alpha_6 = 15\chi_2^3, \dots,$$

а сумісні моменти $m_{ij}^{(v,k)}$ порядку (ij) випадкової величини в моменти часу (v, k) виразяться через сумісні кумулянти наступним чином:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, \quad m_{12} = \chi_{12} = 0, \\ m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2 = \chi_2^2 \left(1 + 2\rho^{(v,k)^2} \right), \dots,$$

де $\rho^{(v,k)}$ – кореляційна функція заданого виду між v -м і k -м вибірковими значеннями.

При дослідженні статистичних зв'язків випадкових процесів важливим є питання вибору кореляційних функцій, які адекватно характеризують кореляційні властивості досліджуваних процесів. Перелік таких функцій є досить широким, разом з тим в [17] наведені деякі типові кореляційні функції, які мають своє застосування в багатьох додатках:

$$\rho_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}, \quad \rho_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}(1 + A|\tau|), \quad (1)$$

$$\rho_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}(1 - A|\tau|), \quad \rho_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} \left(1 + A|\tau| + \frac{A^2 \tau^2}{3} \right),$$

$$\rho_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} \left(\cos B\tau + \frac{A}{B} \sin B|\tau| \right), \quad \rho_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} \cos B\tau$$

$$\rho_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} \left(\cos B\tau - \frac{A}{B} \sin B|\tau| \right),$$

де $\tau = |t_v - t_k|$ – кореляційний інтервал, який при врахуванні статистичних зв'язків менший інтервалу кореляції $\tau = |t_v - t_k| \leq \tau_{кор}$, $v, k = \overline{1, n}$; $\tau_{кор}$ – час кореляції; $\sigma^2 = \rho_{\xi}(0)$ – дисперсія випадкового процесу; $A, B > 0$ – масштабуючі коефіцієнти, які характеризують статистичні зв'язки між вибірковими значеннями. Часове представлення деяких наведених кореляційних функцій (1) від інтервалу кореляції та масштабуючих коефіцієнтів A і B представлено на рис. 1.

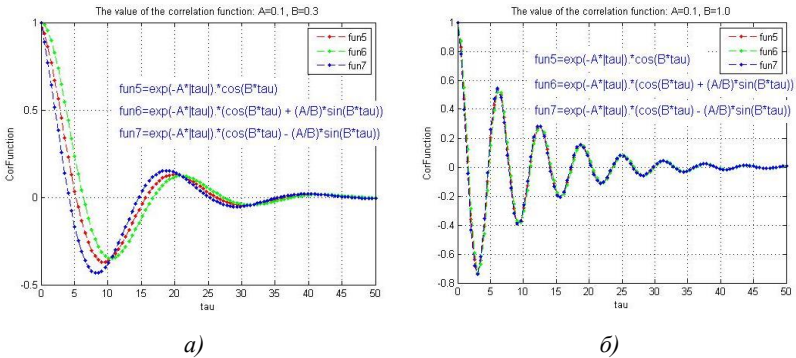


Рис. 1. Залежність кореляційних функцій $\rho_{\xi}(\tau)$ з параметрами масштабування «A» і «B» від інтервалу кореляції τ (τ):
 а) $A = 0.1, B = 0.1$; б) $A = 0.1, B = 1.0$.

В роботі досліджені асиметрично-ексцесні негаусові моделі випадкових величин, які характеризуються статистичними зв'язками і описуються 1D та 2D початковими моментами та кумулянтами. До таких процесів належать розподіли Вейбулла, Релея, Коші, Пірсона типу IV та інші, що описують сигнали в умовах складних завод, коли шуми характеризуються як асиметрією, так і високим ексцесом, а також можуть бути корельованими через спільні джерела завод. У телекомунікаційних системах ці розподіли застосовуються для моделювання інте-

рвалів затримки передачі пакетів у перевантажених мережах, де затримки мають асиметрію, високий ексцес і кореляцію через загальні мережеві умови. Наприклад, у таких системах часто спостерігаються процеси з Релеєвською щільністю розподілу, що характеризуються коефіцієнтами асиметрії $\gamma_3 = 0,63$ та ексцесу $\gamma_4 = 3,26$, які відповідають асиметрично-ексцесним випадковим процесам.

Визначення 3. *Асиметрично-ексцесними* статистично залежними випадковими величинами будемо називати такі, для яких відмінними від нуля будуть χ_2 , χ_3 і χ_4 , а також сумісні кумулянти χ_{03} , χ_{11} , χ_{12} , χ_{21} , χ_{30} , χ_{04} , χ_{31} , χ_{22} , χ_{13} , χ_{40} а всі інші кумулянти п'ятого і вище порядків, а також сумісні кумулянти вище четвертого порядку рівні нулю. Тоді початкові моменти до шостого порядку включно запишуться як:

$$\alpha_1 = \chi_1, \quad \alpha_2 = \chi_2, \quad \alpha_3 = \chi_3, \quad \alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2, \quad \alpha_5 = 10\chi_3\chi_2, \\ \alpha_6 = 15\chi_2\chi_4 + 10\chi_3^2 + 15\chi_2^3, \dots \quad (2)$$

Представимо зв'язок сумісних моментів з сумісними кумулянтами наступним чином:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, \quad m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12} = \gamma_3 \chi_2^2 \rho^{(v,k)\frac{3}{2}}, \\ m_{13}^{(v,k)} = \gamma_4 \chi_{11}^2 + 3\chi_2 \chi_{11}, \quad m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 \left(\gamma_4 \rho^{(v,k)^2} + 1 + 2\rho^{(v,k)^2} \right). \quad (3)$$

На основі запропонованих математичних моделей корельованих *асиметрично-ексцесних* негаусових процесів створені нові методи виявлення сигналів з використанням модифікованого моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез. Такі методи відрізняються від існуючих, використовують багатовимірні моментно-кумулянтні функції вищих порядків (HOS) для врахування тонкої структури негаусових корельованих випадкових процесів. Такий підхід буде використаний для синтезу поліноміальних стохастичних розв'язувальних правил (РП) виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад.

2. Модифікація моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез для побудови поліноміальних розв'язувальних правил. Розглянемо випадкові сигнали $\xi(t)$, що спостерігаються на інтервалі часу $(0, T)$. Потрібно розробити алгоритми обробки стохастичних процесів $\xi(t)$, які дозволяють визначити, чи містять ці процеси корисний сигнал $s(t)$ (відповідно до гіпотези H_1), або ж корисний сигнал відсутній, і процеси $\xi(t)$ складаються лише із завади $\eta(t)$ (відповідно

до гіпотези H_0). У цьому випадку $\xi(t) = s(t) + \eta(t)$, де $\eta(t)$ – стаціонарний корельований негаусовий випадковий процес, який описується набором 1D і 2D кумулянтів та початкових моментів.

Нехай множина початкових моментів при реалізації гіпотези H_1 матиме вигляд – $(m_i^{(v)}, m_{ij}^{(\tau)})$, а при гіпотезі H_0 – $(u_i^{(v)}, u_{ij}^{(\tau)})$, де $\{u_i^{(v)}, m_i^{(v)}\}$ – 1D моменти в момент часу t_v порядку i та $\{u_{ij}^{(\tau)}, m_{ij}^{(\tau)}\}$ – 2D сумісні моменти розмірності (ij) при реалізації гіпотези H_0 і H_1 відповідно.

Для практичної реалізації алгоритмів обробки сигналів зручніше опрацьовувати не неперевний сигнал, а дискретний. Тоді дискретна вибірка сигналу $\xi(t)$ буде мати вид $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ в моменти часу t_v , а реалізацію гіпотез H_0 та H_1 представимо наступним чином:

$$H_1: \xi_v = s_v(\alpha_k) + \eta_v(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)}), \quad H_0: \xi_v = \eta_v(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)}), \quad v = \overline{1, n}. \quad (4)$$

де $s_v(\alpha_k)$ – сигнал, який описується параметрами α_k , $\eta_v(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)})$ – негаусова випадкова величина, яка описується кумулянтами $\chi_{ij}^{(\tau)}$ та кумулянтними коефіцієнтами γ_k .

Для розв'язання поставленої задачі скористаємося загальноприйнятим підходом теорії перевірки статистичних гіпотез. Відповідно до класичного підходу, оптимальний Байєсівський алгоритм виявлення сигналів мінімізує середній ризик [4-6]. Достатня статистика, яка необхідна для перевірки гіпотез, визначається як відношення правдоподібності і має вид

$$\Lambda(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X} | H_1) / P(\mathbf{X} | H_0). \quad (5)$$

Зазвичай відношення правдоподібності (5) застосовується до нормальних законів розподілу ймовірностей, де воно легко інтерпретується і використовується. Однак розв'язання рівнянь виду (5) для негаусових корельованих PDF супроводжується значними труднощами. Ці труднощі пов'язані з невизначеністю типу PDF, її параметрів, а також зі складністю технічної реалізації відповідних алгоритмів. Відтак виникає потреба в альтернативних методах, які здатні подолати ці обмеження. Одним із таких підходів є представлення (5) у вигляді ступеневі поліноміальної функції. Для реалізації цього підходу пропонується розкласти логарифм відношення правдоподібності (5) в стохастичний ряд. Такий ряд може бути використаний для побудови РП, оптимальних за певним момент-

ним критерієм якості. Такий підхід уникає необхідності використання PDF для опису досліджуваних процесів, натомість оперують поняттями математичного сподівання і дисперсії РП.

У практичних застосуваннях використовуються не нескінченні ряди, а багаточлени (поліноми) з обмеженим числом членів:

$$\Lambda(\mathbf{X})_{sn} = k_0 + \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv} \varphi_i(x_v), \quad (6)$$

де x_v є випадковими величинами, $\varphi_i(x_v)$ – функціональні перетворення над ними, а вираз (6) будемо називати *узагальненим стохастичним поліномом степеня s і розмірності n* .

Якщо використовувати степеневі перетворення від вибіркового значень $\varphi_i(x) = x^i$, тоді РП для неоднаково розподілених вибіркового значень (наприклад, вибірки з радіосигналу) набуде наступного виду

$$\Lambda(\mathbf{X})_{sn} = k_0 + \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv} x_v^i \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0. \quad (7)$$

H_1
 H_0

Відмітимо, що в загальному випадку в (7) порівняння повинно відбуватися не з нулем, а з певним порогом. Оскільки коефіцієнт k_0 не визначений, цей поріг можна включити в сам коефіцієнт k_0 .

Визначення 4. РП виду (7) будемо називати правилами, представленими у вигляді узагальненого стохастичного полінома розмірності n , де існують такі коефіцієнти k_0 та k_{iv} , що РП є еквівалентним порівнянню логарифма відношення правдоподібності з певним порогом.

Очевидно, що залишається відкритим питання вибору невизначених коефіцієнтів k_0 та k_{iv} . Попри очевидність застосування класичних ймовірнісних критеріїв якості, реалізувати це неможливо. Щоб вирішити проблему знаходження невідомих коефіцієнтів РП (7), запропоновано новий підхід, який заснований на використанні та подальшій модифікації моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез [18]:

$$Ku(E, G) = (G_{0(sn)} + G_{0(sn)}) / \left(E_{1(sn)} - E_{0(sn)} \right)^2, \quad (8)$$

де математичне сподівання $E_{i(sn)}$ та дисперсія $G_{i(sn)}$ РП (7) для перевірки статистичних гіпотез H_i ($i = 0, 1$) визначаються наступним чином

$$E_{0(sn)} = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s k_{iv} u_{iv}, \quad E_{1(sn)} = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s k_{iv} m_{iv}, \quad (9)$$

$$G_{0(sn)} = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{iv} k_{jv} F_{(ij)v}(H_0), \quad (10)$$

$$G_{1(sn)} = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{iv} k_{jv} F_{(ij)v}(H_1), \quad (11)$$

де m_{iv}, u_{iv} – початкові моменти порядку i в моменти часу v для гіпотез H_1 та H_0 , відповідно, та

$$F_{(ij)v}(H_0) = u_{(i+j)v} - u_{iv}u_{jv}, \quad F_{(ij)v}(H_1) = m_{(i+j)v} - m_{iv}m_{jv} \quad (12)$$

і коефіцієнт k_0 в (7) визначений як середнє математичних сподівань $E_{0(sn)}, E_{1(sn)}$ при гіпотезі H_0 та H_1 відповідно:

$$k_0 = -\left(E_{0(sn)} + E_{1(sn)}\right) / 2 = -\sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv} (m_{iv} + u_{iv}) / 2. \quad (13)$$

Визначення 5. Визначимо функціонал $Ku(E, G)$ (8) як моментний критерій якості прийняття рішень у вигляді РП виду (7), де оптимальні коефіцієнти k_{iv} та k_0 , які мінімізують праву частину (8), визначають цей критерій. Назвемо цей функціонал як моментний критерій якості верхніх границь ймовірностей помилок перевірки статистичних гіпотез, або коротко критерієм Ku . Зазначимо, що чим менше значення критерію (8), тим менше значення суми ймовірностей помилок першого та другого роду РП (7).

Даний моментний критерій якості (8) тісно пов'язаний із класичними ймовірнісними критеріями і має прозорий фізичний зміст. Найкращим буде таке поліноміальне РП виду (7), для якого сума дисперсій $G_{i(sn)}$ (10, 11) РП (7) при гіпотезі та альтернативі будуть мінімальними, а відстань між математичними очікуваннями $E_{i(sn)}$ (9), $i = 0, 1$, буде максимальною.

Такий критерій досліджений і добре себе зарекомендував при синтезі поліноміальних РП виявлення сигналів на фоні негаусових завад [16, 18]. Для розв'язання поставленої задачі виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад необхідно провести додаткові дослідження, які спрямовані на врахування статистичних зв'язків досліджуваних вибіркового значень.

Для розв'язання поставленої задачі потрібно так змінити підхід до побудови РП виду (7), щоб він, з одного боку, враховував статистичні залежності досліджуваного процесу, а з іншого, міг використати всі ті позитивні напрацювання і властивості, якими наділений за-

пропонований моментний критерій верхньої границі ймовірностей помилок (8).

Нехай є n статистично залежних випадкових величин $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Скористаємося підходом, коли логарифм відношення правдоподібності, за теоремою Вейерштраса, для n статистично залежних випадкових величин представляється у вигляді ряду для функції багатьох змінних. Тоді існують такі коефіцієнти розкладу, що логарифм відношення правдоподібності можна представити як:

$$\ln \frac{P(\mathbf{X} | H_1)}{P(\mathbf{X} | H_0)} = k_0 + \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} k_{(v)i} x_{(v)}^i + \sum_{v=1}^n \sum_{p=2}^n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{(v,p)i,j} x_{(v)}^i x_{(p)}^j + \sum_{i=1}^{\infty} \dots \sum_{r=1}^{\infty} k_{(i,\dots,r)} x_1^i x_2^j \dots x_n^r.$$

У представленому виразі окрім першого доданку у вигляді суми первних степенів самої змінної з певними коефіцієнтами, як це вже визначено в РП (7), використовуються також суми всіх можливих комбінацій добутоків змінної з різними степенями. При таких комбінаціях змінних можна досягти врахування кореляційних зв'язків між випадковими величинами. Відмітимо, якщо статистичний зв'язок між випадковими змінними відсутній, то третє і наступні доданки в цьому виразі повинні дорівнювати нулю, і представлення логарифма відношення правдоподібності у вигляді степеневого ряду збігається з виразом, отриманим для незалежних випадкових величин (7).

Для розкладу відношення правдоподібності в ряд застосовувалася властивість теореми Вейерштраса, але такий підхід не визначає методів знаходження самих невідомих коефіцієнтів такого ряду. Такий ряд будемо використовувати як РП для розрізнення статистичних гіпотез, де невизначені коефіцієнти знаходяться з умови екстремуму вибраного критерію якості. Так само, як і при синтезі РП у вигляді стохастичних рядів для незалежної вибірки, неможливо використовувати ймовірнісні критерії якості, оскільки неможливо знайти ймовірність помилок першого та другого роду, виражену через невизначені коефіцієнти.

Для розв'язання поставленої задачі застосуємо моментний критерій якості та проведемо його модифікацію, що дозволить знайти невизначені коефіцієнти через мінімізацію модифікованого критерію якості. Як вже відмічалось, для розв'язання практичних задач доцільно використовувати не ряди, а поліноми із заданою кількістю членів. Тоді при скінченному значенні s в загальному випадку такий поліном не може дорівнювати логарифму відношення правдоподібності, представленому в (5). Разом з тим, певна кількість доданків в такому поліномі надасть можливість наближення до логарифма відношення

правдоподібності, і найпростішим таким наближенням буде наявність в поліномі перших двох доданків:

$$\Lambda(\mathbf{X})_{(sn)}^{(\tau)} = k_0^{(\tau)} + \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(\tau)} x_v^i \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, \quad (14)$$

H_1
 H_0

де невідомі коефіцієнти $k_0^{(\tau)}$ і $k_{iv}^{(\tau)}$ повинні враховувати статистичні зв'язки (τ) між досліджуваними вибірковими значеннями.

Для обробки корельованих негаусових процесів необхідно внести корективи у формування критерію якості перевірки статистичних гіпотез (8) таким чином, щоб врахувати як статистичні зв'язки між вибірковими значеннями, так і їх негаусовий розподіл. Щоб врахувати такі статистичні зв'язки, необхідно використовувати сумісні моменти та кумулянти різних порядків, математичні моделі яких представлені вище та мають властивості для опису таких характеристик. Очевидно, що коефіцієнти $k_0^{(\tau)}$ і $k_{iv}^{(\tau)}$ РП (14), які мають враховувати статистичні залежності вибіркового значень, залежать як від 1D, так і від 2D початкових моментів. У цьому випадку математичне сподівання $E_{i(sn)}^{(\tau)}$ та дисперсія $G_{i(sn)}^{(\tau)}$ РП (14) будуть відрізнятися від (9-11) та будуть залежати від сумісних моментів і кумулянтів та отримають наступний вид:

$$E_{0(sn)}^{(\tau)} = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s k_{iv}^{(\tau)} u_{iv}^{(\tau)}, \quad E_{1(sn)}^{(\tau)} = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s k_{iv}^{(\tau)} m_{iv}^{(\tau)}, \quad (15)$$

$$G_{0(sn)}^{(\tau)} = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{iv}^{(\tau)} k_{jv}^{(\tau)} F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0),$$

$$G_{1(sn)}^{(\tau)} = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{iv}^{(\tau)} k_{jv}^{(\tau)} F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1), \quad (16)$$

де $F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0) = u_{(ij)}^{(\tau)} - u_i^{(v)} u_j^{(k)}$, $F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1) = m_{(ij)}^{(\tau)} - m_i^{(v)} m_j^{(k)}$. (17)

У цьому випадку визначення кореляційних моментів (17) є відмінним від наведених в (12) та залежать не лише від одновимірних (1D) моментів $u_i^{(v)}$ та $m_i^{(v)}$, але й від двовимірних (2D) або сумісних моментів $u_{(ij)}^{(\tau)}$ та $m_{(ij)}^{(\tau)}$ для гіпотез H_0 та H_1 відповідно. Тоді оптимальні коефіцієнти $k_{iv}^{(\tau)}$ РП (14) мають бути визначені з мінімуму функціоналу:

$$Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right) = \left(G_{0(sn)}^{(\tau)} + G_{1(sn)}^{(\tau)}\right) / \left(E_{1(sn)}^{(\tau)} - E_{0(sn)}^{(\tau)}\right)^2. \quad (18)$$

Оптимальні коефіцієнти $k_{iv}^{(\tau)}$ поліноміального стохастичного РП (14) повинні бути обрані таким чином, щоб мінімізувати ймовірності помилок першого та другого роду. При дослідженні на екстремум критерію $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (18) і визначення його мінімального значення дозволило отримати систему рівнянь для знаходження оптимальних коефіцієнтів $k_{iv}^{(\tau)}$:

$$\sum_{j=1}^s k_{iv}^{(\tau)} \left(F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0) + F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1)\right) = m_i^{(v)} - u_i^{(v)}, \quad v = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, s}. \quad (19)$$

Визначення 6. Нехай функціонал $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (18) визначається як моментний критерій якості перевірки статистичних гіпотез для статистично залежних вибіркових значень у вигляді РП виду (14). Припустимо, що оптимальні коефіцієнти РП $k_0^{(\tau)}$ і $k_{iv}^{(\tau)}$ з (14), які мінімізують праву частину рівняння (18), визначають цей критерій. Назвемо цей критерій як «*модифікований моментний критерій якості верхніх границь ймовірностей помилок для перевірки статистичних гіпотез*».

Відмітимо, що менше значення критерію (18) вказує на менше значення суми ймовірностей помилок першого та другого роду РП виду (14).

Для розв'язання системи рівнянь (19) використовують числові методи та доповнення Шура для обробки блокових матриць. Двовимірні 2D сумісні моменти $u_{(ij)}^{(\tau)}$ та $m_{(ij)}^{(\tau)}$ використані для визначення кореляційної функції $\rho_{\xi}(\tau)$ (1), яка визначається як:

$$r_{\xi}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & r^{(\tau_{1,2})} & \dots & r^{(\tau_{1,n})} \\ r^{(\tau_{2,1})} & 1 & \dots & \rho r^{(\tau_{2,n})} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho r^{(\tau_{n,1})} & r^{(\tau_{n,2})} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Наприклад, для експоненційної кореляційної функції $\rho_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$ можна записати наступне співвідношення:

$$\rho_{\xi}(\tau) = \rho_{\xi}^{(\tau_{v,k})} = e^{-A|t_v - t_k|},$$

де $\tau_{(v,k)}$ – час кореляції, а A – масштабуючий коефіцієнт.

Властивість 1. Якщо оптимальні коефіцієнти РП (14) визначені шляхом розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (19), то вони задовольняють умову:

$$I_{sn}^{(\tau)} = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s k_{iv}^{(\tau)} k_{jv}^{(\tau)} \left[F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0) + F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1) \right] = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s k_{iv}^{(\tau)} \left(m_i^{(v)} - u_i^{(v)} \right), \quad j = \overline{1, s}. \quad (21)$$

Визначення 7. Нехай $I_{sn}^{(\tau)}$ (21) визначений як кількість інформації, яка отримана при розрізненні гіпотез H_0 та H_1 з вибірки розміру n , коли використовується стохастичний поліном РП (14) степеня s і є зворотною величиною до значення $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (18).

Ці значення $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ та $I_{sn}^{(\tau)}$ будуть використанні для оцінювання ефективності синтезованих стохастичних РП (14) при різних степенях поліномів.

3. Синтез поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад. Нехай досліджуваний вхідний сигнал $\xi(t)$ складається з адитивної суміші корисного сигналу $s(t)$ та завади $\eta(t)$, які спостерігаються на інтервалі часу $[0, T]$:

$$\xi(t) = s(t) + \eta(t), \quad (22)$$

де $\eta(t)$ – стаціонарний корельований негаусовий випадковий процес, який описується набором 1D та 2D кумулянтів та моментів.

На практиці, при побудові технічних систем, іноді зручніше опрацювати не неперевний сигнал, а дискретний в певні моменти часу, що пов'язано із широким застосуванням цифрових систем обробки сигналів. В цьому випадку дискретна вибірка сигналу $\xi(t)$ (22) буде мати вид $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ в моменти часу t_v , а наявність чи відсутність корисного сигналу $s(t)$ в цій вибірці \mathbf{X} буде описуватися реалізацією відповідної гіпотези H_0 (корисний сигнал $s(t)$ відсутній) або H_1 (корисний сигнал $s(t)$ присутній) наступним чином:

$$H_1: \xi_v = s_v(\alpha_k) + \eta_v(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)}), \quad H_0: \xi_v = \eta_v(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)}), \quad v = \overline{1, n},$$

де $s_v(\alpha_k)$ – корисний сигнал, який описується параметрами α_k , $\eta_v(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)})$ – негаусова випадкова величина з параметрами у формі набору кумулянтів $\chi_{ij}^{(\tau)}$, $k = \overline{1, \mu}$.

В даному дослідженні припустимо, що в якості корисного сигналу $s(t)$ буде виступати повністю відомий постійний сигнал a , виявлення якого є класичною задачею в теорії виявлення сигналів. Цей тип сигналу зустрічається у випадках, коли характеристики сигналу, такі як форма і спектр, повністю відомі й залишаються постійними з часом. Така постановка завдань виникає в системах, де існує чітке знання про сигнал, який необхідно виявити на фоні шуму, наприклад передача цифрових сигналів по каналам зв'язку.

Синтез поліноміального РП при степені $s = 1$. Skorистаємося загальним РП, представленим в (14), де оптимальні коефіцієнти знаходяться з мінімуму модифікованого моментного критерію $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (18).

Для побудови такого РП наведемо моментно-кумулятний опис у вигляді одновірних (1D) моментів до другого порядку (2s порядку) для корельованих *асиметрично-ексцесних* негаусових процесів

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \chi_2, \quad m_1 = a, \quad m_2 = a^2 + \chi_2,$$

а сумісні моменти $u_{11}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_0 та $m_{11}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_1 запишуться як:

$$u_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, \quad m_{11}^{(v,k)} = a^2 + \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)},$$

де $\rho^{(v,k)}$ – кореляційна функція випадкового процесу, яка визначається згідно (1) або може мати інший вид і обирається згідно відповідної задачі дослідження.

Відповідно до (17), функції $F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_i)$, $i = 0, 1$, матимуть наступний вид – $F_{(11)}^{(\tau)}(H_0) = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}$, $F_{(11)}^{(\tau)}(H_1) = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}$.

Показано, що РП при $s = 1$ прийме кінцеве значення

$$\begin{matrix} H_1 \\ \sum_{v=1}^n \Delta_{Av} \left(x_v - \frac{a}{2} \right) > 0, \\ H_0 < 0, \end{matrix} \quad (23)$$

де Δ_{Av} – визначник, який отримується з Δ_1 при заміні v стовбця на новий стовбець, який складається з одиниць, а Δ_1 запишеться як:

$$\Delta_1 = \det F_{(11)}^{(\tau)} = \det \rho^{(\tau_{v,k})} = \begin{vmatrix} \rho^{(1,1)}, \rho^{(1,2)} & \dots & \rho^{(1,n)} \\ \rho^{(2,1)}, \rho^{(2,2)} & \dots & \rho^{(2,n)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \rho^{(n,1)}, \rho^{(n,2)} & \dots & \rho^{(n,n)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

де $F_{(ij)}^{(\tau)} = F_{(ij)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(ij)}^{(\tau)}(H_1)$.

Ефективність такого РП (23) буде визначатися через значення критерію якості $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (18), який представляє собою суму верхніх границь ймовірностей помилок першого та другого роду РП і має вид

$$Ku_1(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}) = \frac{\Delta_1}{a^2 \sum_{v=1}^n \Delta_{Av}}.$$

Згідно з (21) отримаємо значення, яке є зворотною величиною до критерію якості і виражається як обернена величина до $Ku_1(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$:

$$I_{ln}^{(\tau)} = a^2 \sum_{v=1}^n \Delta_{Av} / \Delta_1. \quad (24)$$

При статистично незалежних вибіркових значеннях РП (23) виводжується в добре відоме лінійне РП, яке має вид

$$\begin{array}{c} H_1 \\ \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v - \frac{a}{2} > 0, \\ H_0 \end{array} \quad (25)$$

а значення критерію якості $Ku_1(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ перетвориться до наступного виду

$$Ku_1(E, G) = 2 / nq, \quad (26)$$

де q – відношення сигнал/шум (SNR – signal-to-noise ratio).

З даного виразу видно, що чим більше значення n або q , тим менше значення критерію $Ku_1(E, G)$, і відповідно, менші значення верхніх границь ймовірностей помилок першого та другого роду лінійного РП (25).

Величина, яка є зворотною до даного критерію $Ku_1(E, G)$ (26), є кількість інформації, яка отримана при розрізненні гіпотез H_0 та H_1 з вибірки розміру n і має вид

$$I_{ln}(E, G) = nq / 2. \quad (27)$$

Відмітимо, що отримане РП (23) не враховує негаусовий розподіл досліджуваних вибіркових значень, оскільки для його синтезу використовувалися лише початкові моменти першого та другого порядку, а саме математичне сподівання і дисперсія, які не мають властивостей для опису негаусових щільностей розподілу. Разом з тим, для побудови

такого лінійного РП були застосовані сумісні моменти другого порядку, що надало можливості для врахування кореляційних властивостей досліджуваного процесу. Тому збільшимо степінь РП до $s = 2$ таким чином, щоб з'явилася можливість врахувати негаусові властивості досліджуваного випадкового процесу через застосування статистик вищих порядків у вигляді *коефіцієнтів асиметрії та ексцесу*.

Синтез поліноміального РП при степені $s = 2$. В цьому випадку РП буде нелінійним, оскільки вибіркові значення будуть підноситися до квадрату (x_v^2) і, згідно загальної форми представлення РП (14), має наступний вид:

$$\Lambda(\mathbf{X})_{(2n)}^{(\tau)} = k_0^{(\tau)} + \sum_{v=1}^n k_{1v}^{(\tau)} x_v + \sum_{v=1}^n k_{1v}^{(\tau)2} x_v^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0. \quad (28)$$

H_1
 H_0

Для знаходження оптимальних коефіцієнтів РП (28), згідно критерію (18), апріорна інформація про корельований асиметрично-ексцесний негаусовий процес буде представлена через початкові та сумісні моменти. Показано, що початкові моменти u_i досліджуваної випадкової величини при гіпотезі H_0 до 4-го порядку тримають наступний вид

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \chi_2, \quad u_3 = \chi_3 = \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}}, \quad u_4 = 3\chi_2^2, \quad (29)$$

та m_i при гіпотезі H_1 запишуться як:

$$m_1 = a, \quad m_2 = a^2 + \chi_2, \quad m_3 = a^3 + 3a\chi_2 + \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}}, \quad (30)$$

$$m_4 = a^4 + 6a^2\chi_2 + 4a\gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} + 3\chi_2^2,$$

а сумісні моменти $u_{ij}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_0 запишуться як:

$$u_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, \quad u_{12}^{(v,k)} = u_{21}^{(v,k)} = \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} \rho^{(v,k)\frac{3}{2}}, \quad (31)$$

$$u_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 + 2\chi_{11}^1 = \chi_2^2 \left(1 + 2\rho^{(v,k)^2}\right),$$

та $m_{ij}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_1 :

$$m_{11}^{(v,k)} = a^2 + \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)},$$

$$m_{12}^{(v,k)} = m_{21}^{(v,k)} = a^3 + a\chi_2 + 2a\chi_2\rho^{(v,k)} + \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} \rho^{(v,k)\frac{3}{2}}, \quad (32)$$

$$m_{22}^{(v,k)} = a^4 + 2a^2 \chi_2 + \chi_2^2 + 4a^2 \chi_2 \rho^{(v,k)} + 4a\gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} \rho^{(v,k)\frac{3}{2}} + 2\chi_2^2 \rho^{(v,k)2}.$$

Невідомі коефіцієнти нелінійного поліноміального РП (28) $k_{1v}^{(\tau)}$ та $k_{2v}^{(\tau)}$ знаходяться відповідно до розв'язання системи рівнянь (19), де застосований метод Крамера та доповнення Шура для роботи з блоковими матрицями. Показано, що оптимальні коефіцієнти РП (28) приймуть вид

$$k_{1v}^{(\tau)} = \Delta_{Bv} / \Delta_2, \quad v = \overline{1, n}, \quad k_{2v}^{(\tau)} = \Delta_{Cv} / \Delta_2, \quad v = \overline{n+1, 2n},$$

де визначник Δ_2 системи рівнянь (19) запишеться як

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} F_{(11)}^{(\tau)} & F_{(12)}^{(\tau)} \\ F_{(21)}^{(\tau)} & F_{(22)}^{(\tau)} \end{pmatrix}, \quad v, k = \overline{1, n},$$

Δ_{Bv} – визначник, який отриманий з визначника Δ_2 , коли v -й стовбець ($v = \overline{1, n}$) замінений на інший стовбець зі значеннями $(q^{0.5}, q^{0.5}, \dots, q^{0.5}, q, q, \dots, q)$, Δ_{Cv} – визначник, який знаходиться так само для $v = \overline{n+1, 2n}$, $F_{(i,j)}^{(\tau)} = F_{(i,j)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(i,j)}^{(\tau)}(H_1)$, де відповідні функції визначаються як в (17).

Пороговий коефіцієнт $k_0^{(\tau)}$ РП (28) для знайдених коефіцієнтів $k_{1v}^{(\tau)}$ та $k_{2v}^{(\tau)}$ розраховується як

$$k_0^{(\tau)} = -\frac{1}{2\Delta_2} \sum_{v=1}^n (q^{0.5} \Delta_{Bv} + \Delta_{Cv} (q+1)).$$

Легко бачити, що запропоноване РП виду (28) є нелінійним і враховує характеристики як негаусового процесу через врахування коефіцієнтів асиметрії γ_3 та ексцесу γ_4 , так і кореляційні зв'язки вибірових значень через використання сумісних кумулянтів $\chi_{ij}^{(\tau)}$, $i, j = \overline{1, 2}$ у виразах (29)-(32).

Ефективність синтезованого нелінійного РП виду (28) у порівнянні з лінійним РП (23) можна виразити або через значення критерію якості $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (18) або кількість добутої інформації $I_{sn}^{(\tau)}$ з вибірових значень про розрізнення гіпотез H_0, H_1 згідно виразу (21). Скористаємося значенням $I_{sn}^{(\tau)}$, оскільки це спрощує розрахункові вирази, і після математичних перетворень прийме вид

$$I_{2n}^{(\tau)} = (1/\Delta_2) \sum_{v=1}^n (q^{0.5} \Delta_{Bv} + q \Delta_{Cv}). \quad (33)$$

4. Результати та обговорення. Проведено аналіз синтезованих поліноміальних РП при степенях полінома $s = 1, 2$ та порівняно їх ефективність в залежності від параметрів коефіцієнта асиметрії γ_3 та ексцесу γ_4 негаусової завади, відношення сигнал/шум q та параметрів кореляції різних кореляційних функцій $\rho_\xi(\tau)$, наведених в (1). Ефективність РП порівнювалася по значенню критеріїв якості $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ для степені полінома РП при $s = 1$ та $s = 2$, або кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез для лінійного РП $I_{1n}^{(\tau)}$ (24) та нелінійного РП $I_{2n}^{(\tau)}$ (33).

Чим більше значення кількості добутої інформації $I_{1n}^{(\tau)}$ або $I_{2n}^{(\tau)}$, тим менше значення критерію якості для такого РП, і відповідно, менші ймовірності помилок першого та другого роду РП. Отже, РП з більшим показником кількості добутої інформації буде вважатися більш ефективним.

На рис. 2 приведені залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 РП при степені полінома $s = 1$ та $s = 2$ відповідно від коефіцієнта асиметрії негаусової завади γ_3 (γ_3). Дослідження проводилися при різних значеннях відношення сигнал/шум ($q = 0.1; 1; 10$) та параметрах кореляції для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$. Така експоненційна автокореляційна функція широко застосовується для опису стаціонарних процесів з експоненційним згасанням кореляції, використовується в системах передбачення та обробки сигналів для моделювання швидко загасаючих сигналів.

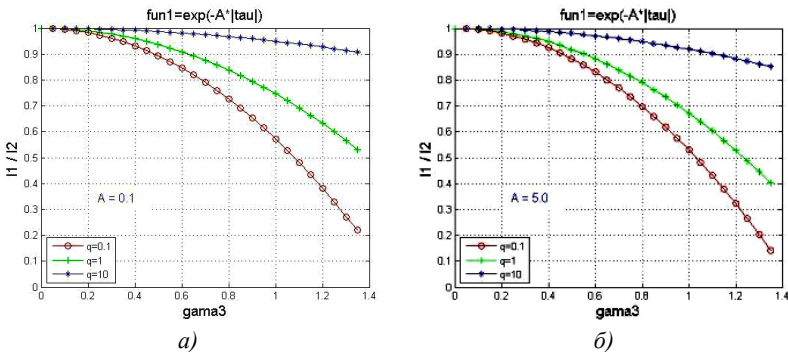


Рис. 2. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади γ_3 і параметрах кореляції а) – $A = 0.1$; б) – $A = 5.0$ для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$.

На рис. 2.а масштабуючий коефіцієнт має мале значення $A = 0.1$, що свідчить про сильні статистичні зв'язки вибіркового значень, а на рис. 2.б – $A = 5.0$, що свідчить фактично про відсутність таких статисти-

чних залежностей. При нульовому значенні $\gamma_3 = 0$, що відповідає гаусовій моделі досліджуваного випадкового процесу, параметри $I_{1n}^{(\tau)}$ та $I_{2n}^{(\tau)}$ є однаковими, про що свідчить їх відношення, яке дорівнює $I_{1n}^{(\tau)} / I_{2n}^{(\tau)} = 1$. При зростанні параметра γ_3 (γ_3) таке відношення стає менше одиниці, що свідчить про зростання кількості добутої інформації $I_{2n}^{(\tau)}$ у порівнянні з $I_{1n}^{(\tau)}$, і відповідно, зменшення ймовірностей помилок нелінійного РП у порівнянні з лінійним, яке є оптимальним для гаусової моделі випадкового процесу. Наприклад, для рис. 2.a при $\gamma_3 = 1.1$ і $q = 0.1$ відношення $I_{1n}^{(\tau)} / I_{2n}^{(\tau)} = 0.5$, що свідчить про те, що ймовірності помилок синтезованого нелінійного РП при степені полінома $s = 2$ будуть вдвічі менші за аналогічний показник для лінійного РП при $s = 1$, яке є оптимальним для гаусової моделі завод. Таким чином, врахування параметрів, що описуються негаусовий розподіл досліджуваного випадкового процесу збільшує ефективність РП у порівнянні з поширеними і добре відомими лінійними моделями РП, оптимальними за гаусовою щільністю розподілу досліджуваного процесу.

На рис. 3. наведені аналогічні характеристики відношення I_1 / I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади γ_3 , які демонструють швидке згасання кореляції з повільними осциляціями а) – $A = 1.0$, $B = 1.0$, та характеризують високочастотні процеси б) – $A = 2.0$, $B = 50.0$. В обох випадках спостерігається тенденція до збільшення ефективності нелінійної обробки вибіркового значень поліноміальним РП (28) з урахуванням коефіцієнта асиметрії досліджуваного процесу у порівнянні з лінійною обробкою РП (23).

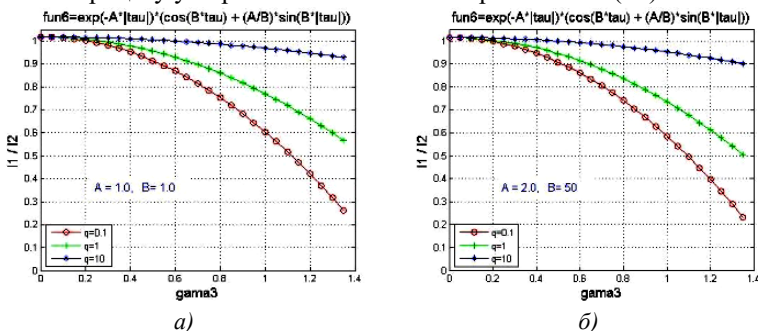


Рис. 3. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1 / I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади γ_3 при різних параметрах кореляції а) – $A = 1.0$, $B = 1.0$; б) – $A = 2.0$, $B = 50.0$ для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} \left(\cos B\tau + \frac{A}{B} \sin B|\tau| \right)$

$$\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} \left(\cos B\tau + \frac{A}{B} \sin B|\tau| \right)$$

Висновки. В роботі запропонований новий підхід, який базується на використанні одновимірних (1D) і двовимірних (2D) моментно-кумулянтних моделей вищих порядків, які надають можливість не тільки описати негаусові характеристики досліджуваних випадкових процесів, але і їх кореляційні властивості. Показано представлення відношення правдоподібності перевірки статистичних гіпотез у вигляді поліноміального РП, оптимальні коефіцієнти якого знаходяться по модифікованому моментному критерію якості верхніх границь ймовірностей помилок, який використовує статистики вищих порядків для опису корельованих негаусових процесів.

На основі запропонованого методу були синтезовані лінійні та нелінійні РП, проаналізовані їх властивості та визначені характеристики, що демонструють їхню ефективність у разі впливу корельованих негаусових завад. Встановлено, що лінійні РП не враховують особливостей негаусового розподілу випадкових величин, оскільки для їх опису використовуються лише два перші моменти – середнє значення та дисперсія випадкових процесів. У той же час, отримані лінійні РП відповідають результатам, отриманим із використанням відношення правдоподібності для гаусових моделей випадкових процесів. Застосування нелінійної обробки вибірових даних та врахування статистик вищих порядків негаусових процесів, таких як коефіцієнти асиметрії та ексцесу, підвищує ефективність виявлення сигналів. Це проявляється у зменшенні значення критеріїв якості РП та зниженні ймовірностей помилок першого та другого роду. Встановлено, що кореляційні зв'язки знижують ефективність обробки як для лінійних, так і для нелінійних РП. Проте врахування особливостей негаусового процесу через коефіцієнт асиметрії та ексцесу в цілому покращують результати нелінійної обробки сигналів.

Список використаних джерел:

1. Michael H. Herzog, Gregory Francis, Aaron Clarke. *Experimental Design and the Basics of Statistics: Signal Detection Theory (SDT)*. Springer. 2019. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-03499-3>.
2. Robert M. Gray, Lee D. Davison. *An Introduction to Statistical Signal Processing*. Cambridge University Press. 2012. URL: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511801372>.
3. Saeed V. Vaseghi. *Advanced Statistical Signal Processing and Noise Reduction*. Third Edition. John Wiley & Sons, 2006.
4. Van Trees H., Bell K., Tiany Z. *Detection Estimation and Modulation Theory*. 2nd edition. New Jersey: Wiley, 2013.
5. Kay S. M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing*. NJ: Prentice Hall PTR, 2008.
6. Kassam S. *Signal Detection in Non-Gaussian Noise*. New York: Springer Verlag, 2011.

7. Guo G., Mandal M., Jing Y. A robust detector of known signal in non-Gaussian noise using threshold systems. *Signal Processing*. 2012. Vol. 92. Issue 11. P. 2676-2688. URL: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.04.014>.
8. Duana F., Chapeau-Blondeau F., Abbott D. Non-Gaussian noise benefits for coherent de-tection of narrow band weak signal. *Physics Letters A*. 2014. Vol. 378. P. 1820-1824. URL: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2014.04.061>.
9. Hari V. N., Anand G. V., Premkumar A. B., Madhukumar A. S. Design and performance analysis of a signal detector based on suprathreshold stochastic resonance. *Signal Processing*. 2012. Vol. 92. Issue 6. P. 1745-1757. URL: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.01.013>.
10. Rousseau D., Anand G. V., Chapeau-Blondeau F. Noise enhanced nonlinear detector to im-prove signal detection in non-Gaussian noise. *Signal Processing*. 2006. Vol. 86. Issue 11. P. 3456-3465. URL: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2006.03.008>.
11. Picinbono B. On deflection as a performance criterion in detection. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 1995. Vol. 31. № 3. P. 1072-1081. URL: <https://doi.org/10.1109/7.395235>.
12. Biglieri E., Lops M. Linear-Quadratic Detectors for Spectrum Sensing. *Journal of Communications and Networks*. 2014. Vol. 16. № 5. P. 485-492. URL: <https://doi.org/10.1109/JCN.2014.000087>.
13. Peppas K., Mathiopoulou P., Yang J., Zhang C., Sasase I. High-order statistics for the channel capacity of egc receivers over generalized fading channels. *IEEE Communications Letters*. 2018. Vol. 22. № 8. P. 1740-1743. URL: <https://doi.org/10.1109/LCOMM.2018.2846229>.
14. Kunchenko Y. Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random Variables. Aachen: Shaker Verlag, 2002.
15. Vokorokos L., Marchevsky S., Ivchenko A., Palahina E., Palahin V. Parameters Estimation of Correlated non-Gaussian processes. *Method of Polynomial Maximization*. 2017. Vol. 11. № 3. P. 313-319. URL: <https://doi.org/10.1049/iet-spr.2016.0142>.
16. Palahina E., Gamcova M., Gladisova I., Gamec J., Palahin V. Signals Detection in Correlated non-Gaussian Noise Using Higher-Order Statistics. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2018. Vol. 37 (4). P. 1704-1723. URL: <https://doi.org/10.1007/s00034-017-0623-5>.
17. Палагін В. В., Івченко О. В., Ведерніков Д. А. Статистичне оцінювання параметрів негаусових корельованих випадкових процесів: [монографія]. Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко Є.І., 2018. 199 с.
18. Palahin V., Zorin O. Models and Methods for RZ-signals distinction in non-Gaussian noise for information-measurement systems. *Journal of Electrical Engineering*. 2024. Vol. 75. № 5. P. 372-382. URL: <https://doi.org/10.2478/jee-2024-0045>.

HIGHER-ORDER STATISTICS IN SIGNAL DETECTION TASKS IN CORRELATED NON-GAUSSIAN NOISE

Signal detection in noise are critical in telecommunications, navigation and radar systems, image processing and biomedical research, where noise

often deviates from a normal distribution, and sample values exhibit statistical dependence. Traditional methods for analyzing and designing such systems face significant limitations, including algorithmic and computational complexity, which severely restrict their practical application.

An effective approach to developing signal detection systems involves using moment and cumulant descriptions of random variables, simplifying the design of detection systems for signals with various probability density functions. The authors propose a novel approach based on one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) moment-cumulant models to describe correlated non-Gaussian processes. This approach enables the modification of the moment-based criterion for statistical hypothesis testing and the synthesis of polynomial stochastic decision rules for detecting signals in correlated non-Gaussian noise.

The study demonstrates that nonlinear processing of sample values and the application of higher-order statistics to describe the investigated processes account for the structure of non-Gaussian noise and its statistical dependencies. This reduces the error probabilities of the synthesized decision rules compared to traditional Gaussian models.

The aim of the study is to enhance the efficiency of signal detection systems under additive interaction with correlated non-Gaussian noise by developing new moment-cumulant models of the investigated processes, modifying the moment-based criterion for hypothesis testing, and designing polynomial decision rules. The practical significance of the study lies in creating simple-to-implement algorithms with high accuracy that achieve lower error probabilities in decision rules compared to existing methods.

Key words: *computer and mathematical modelling, correlated non-Gaussian processes, higher-order statistics, moment-based quality criterion for hypothesis testing, polynomial signal detection algorithms, information technology.*

Отримано: 1.12.2024