

УДК 519.71

DOI: 10.32626/2308-5916.2024-26.64-71

В. С. Щирба, канд. фіз.-мат. наук,**В. А. Іванюк**, д-р техн. наук,**Т. М. Пилипюк**, канд. фіз.-мат. наук,**М. О. М'ястковська**, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДОСЛІДЖЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ ПОЛЬОТУ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Дана робота присвячена дослідженню моделі руху безпілотного літального апарату. Увагу зосереджено на питанні дослідження сил, які визначають динаміку руху, розглядається рівнодіюча сила. Виходячи з того, що рівняння руху залежить від конструкційних особливостей та призначення літальних апаратів, а їх арсенал досить різномісний і багатогранний, в основу дослідження покладено тактико-технічні характеристики (ТТХ) оперативного-тактичних ракетних комплексів.

В роботі розглянуто модель на пасивній ділянці траєкторії, де характер рівняння руху визначають лише сили тяжіння та аеродинамічні сили. Враховуючи максимальну висоту польоту та ймовірнісний характер похибок в розрахунках, силу тяжіння пропонується вважати сталою на всій траєкторії руху. Тому всі зусилля направлено на визначення числових значень для визначення аеродинамічної сили. Тут велике значення мають ТТХ ракети. Варто зауважити, що реальні й достовірні дані про ракету, зокрема її конструкцію та дані експериментів відсутні. Вони або засекречені, або наперед недостовірні (навмисне подані з деякою похибкою), або встановлюються експериментально з певною долею точності чи ймовірності. Тому наведені в роботі числові значення слід сприймати як ймовірнісні.

На активній ділянці траєкторії руху основну увагу приділено визначенню сили тяги двигуна. Наведені числові значення, що характеризують його силу, табличні значення результатів експериментів є умовно вірні, але похибки є незначними. Ще більше невизначеності становлять дані про природні сили руху повітря.

Це зумовило порівнювати різні типи ракетної техніки та визначати «умовно» вірні значення. На основі запропонованої математичної моделі можна вирішувати завдання прогнозування навігації безпілотного літального апарату з наведеними числовими значеннями основних його характеристик та інших необхідних вхідних даних. Це дозволить досліджувати та формувати оптимізаційні траєкторії польоту.

Ключові слова: літальний апарат, навігація, траєкторія, сила тяги двигуна.

Вступ. Постановка проблеми у загальному вигляді. Через порушення росією «Угоди про ліквідацію ракет середньої та малої дальності» (підписаної 8 грудня 1987 року) і виходу з неї на початку лютого 2019 року обох наддержав (у військовому розумінні), Україна звільнилася від ряду зобов'язань, що дало їй право створювати для власного самозахисту сучасні потужні та ефективні системи озброєння, в тому числі ракетні комплекси різного призначення. Сьогодні для досягнення паритету із супротивником в системах зброї нам потрібні в першу чергу далекобійні ракети з дальністю ураження 150 і більше кілометрів. Окрім закупівель за кордоном з'являються власні зразки такої техніки.

Технічні розробки цих зразків спонукали до посилення наукових досліджень на військову тематику, в тому числі на тематику, яка пов'язана з розробкою ракет з різними тактико-технічними характеристиками [1, 2, 5]. Актуальними, зокрема, постають дослідження в галузі теорії польоту ракет [5].

Першочергове завдання теорії польоту – розрахунок траєкторії руху літального апарату за раніше визначеними даними. Для вирішення цього завдання необхідно, по-перше, побудувати відповідну адекватну математичну модель, що включає визначення сил, які діють на літальний апарат, встановлення функціональних залежностей та, крім того, знайти числові значення величин цих сил як у момент старту, так і в кожний момент часу польоту. Зрозуміло, що дане завдання досить складне, бо більшість сил, які діють на літальний апарат під час польоту, мають динамічний ймовірнісний характер. Вони також залежать від конструкційних особливостей та призначення апарату.

Не дивлячись на те, що методи визначення траєкторії польоту для будь-яких літальних апаратів пов'язані з обробкою числових даних різних параметрів, які або засекречені, або наперед недостовірні (умовно правильні), або встановлюються експериментально з певною долею точності чи ймовірності, вони дозволяють проводити чисельні експерименти і на підставі них можна робити висновки про характер поведінки літального апарату на всіх ділянках траєкторії.

Для аналізу параметрів поведінки цього керованого безпілотною літального апарату та чисельної оцінки результатів, одержаних при проведенні комп'ютерних експериментів з математичною моделлю принципове значення надається рівнянню руху безпілотною, яке є основою будь-яких досліджень літальних апаратів, пов'язаних з динамікою переміщення.

Предметом дослідження в даній роботі виступають керовані безпілотні літальні апарати. Для моделювання динаміки польоту використовуються в основному числові значення і характеристики тактико-технічних даних оперативного-тактичних балістичних ракет типу Іскандер.

Мета статті – розробка моделі для прогнозування траєкторії польоту безпілотних літальних апаратів (на прикладі балістичної ракети) з акцентом на формування рівняння руху та визначення необхідних вхідних даних для проведення чисельних експериментів.

Основна частина. Враховуючи, що після старту ракети для дослідження руху стартова система координат фактично не використовується, будемо проводити розрахунки в швидкісній системі координат. «Після старту літального апарату фактично всю наступну роботу з математичною моделлю необхідно пов'язувати з швидкісною (імпульсною, динамічною) системою координат» [5, с. 142].

Вибираючи модель, будемо враховувати в першу чергу лише основні характеристики та параметри апарату і намагатися формувати математичну модель якомога простішою і зрозумілішою для тих, хто буде її використовувати. Разом з тим, модель будемо будувати достатньо адекватною, щоб з необхідним ступенем точності можна було б досліджувати траєкторію літального апарату. Тобто, будуючи діючу математичну модель ракети, передбачаємо побудову математичного об'єкту, який відображатиме параметри і властивості, досить подібні властивостям і співвідношенням реального об'єкту (оригіналу), незважаючи на широке представництво ракет різного типу [3, 4].

Параметри, що визначають характер руху ракети, залежать від її імпульсу (вектора кількості руху), який дорівнює добутку маси ракети на її швидкість і співпадає з напрямком її швидкості.

На пасивній ділянці траєкторії (при вимкненому двигуні) маса ракети не змінюється. Отже, зміна імпульсу буде відбуватися лише через вплив сили тяжіння та сили опору навколишнього середовища.

Для балістичної ракети «Іскандер» стартова маса становить 2500 кг, а без палива – 480 кг. Варто взяти до уваги, що «реальні і достовірні дані про КР відсутні, тому слід сприймати ці дані як імовірні» [4, с. 9] (тут КР – конструкція ракети). При переході з активної ділянки траєкторії на пасивну не завжди запаси палива вичерпуються повністю. Деякий залишок палива може залишатися в резерві для проведення захисних маневрів при заході на ціль або для збільшення руйнівної сили ракети за допомогою залишків палива.

Цим параметром можна варіювати при проведенні чисельних експериментів. Він також впливає на величину сили тяжіння.

Модель гравітаційного поля в прямокутній системі координат задається співвідношенням:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = - \frac{g_0 \cdot R_3^2}{(x^2 + (y + R_3)^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y + R_3 \\ z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Якщо під час вільного польоту управління відсутнє, то (1) спрощується:

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_y \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{g_0 \cdot R_3^2}{(y + R_3)^2}, \quad (2)$$

де g_0 – прискорення вільного падіння на поверхні Землі.

Вважають, що в середніх широтах радіус Землі становить приблизно 6371 км. Виходячи з того, що максимальна висота польоту, наприклад, ракети «Іскандер» становить 50 км [4, с. 9], тоді, через невелике значення цієї величини у порівнянні з радіусом Землі, для чисельного дослідження можна вважати, що сила тяжіння не залежить від висоти польоту ракети. Тобто, до уваги потрібно брати лише масу ракети. Тоді, силу тяжіння на всьому проміжку польоту ракети можна вважати рівною:

$$F = mg.$$

Розглянемо питання про аеродинамічну силу – силу, з якою зустрічний потік повітряних мас діє на поверхню ракети, тобто про силу опору повітря. Дослідження аеродинамічних сил відбувається на експериментальних стендах і за результатами стендових експериментів складається ряд таблиць для кожного типу ракет.

Вектор аеродинамічних сил залежить в першу чергу від геометричних розмірів ракети, а також від швидкості ракети та фізичних параметрів атмосфери. Він обчислюється за формулами:

$$\begin{aligned} f_x &= -C_x \cdot q \cdot S; \\ f_y &= C_n^\alpha \cdot q \cdot S \cdot \alpha; \\ f_z &= -C_n^\alpha \cdot q \cdot S \cdot \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Якщо управління відсутнє ($\alpha = \beta = 0$), то $f_y = f_z = 0$.

Залишається проаналізувати формулу

$$f_x = -C_x \cdot q \cdot S.$$

Не складно визначити за даними, наприклад [4], що площа Міделя для ракети Іскандер при «лобовому» опорі повітря наближено дорівнює 0,66 м². Динамічний тиск q визначається співвідношенням

$$q = \rho \cdot V^2 / 2 \text{ кгс/м}^2,$$

де V – абсолютне значення швидкості, ρ – значення густини атмосферного повітря на відповідній висоті польоту. Числове значення цієї величини визначається за таблицею властивостей атмосфери. Її можна одержати через запит в Інтернеті.

Залишається визначити значення аеродинамічних коефіцієнтів C_x . Вони визначаються наближено за результатами натурних спостережень і подаються у вигляді табличних значень.

Шкала таблиці залежать від трьох параметрів (фактично тривимірна таблиця): кута атаки, числа Маха (характеристичне число, що визначається відношенням швидкості руху тіла в рідині чи газі до швидкості звуку в цьому середовищі) і від висоти польоту (безпосередньо) або від сили гравітації на певній висоті польоту (опосередковано). Для спрощення табличні дані розбивають на декілька двовимірних таблиць в залежності від кута атаки. Тоді коефіцієнти C_x подають у вигляді залежностей лише від числа Маха і від висоти польоту або від сили гравітації. На пасивній траєкторії намагаються встановити кут атаки в 45 градусів. На підприємстві «Південмаш» у свій час проводили різного роду експерименти з метою визначення аеродинамічних показників для задач дослідження космічних польотів і повідомляли (Space Technology. Missile Armaments), що при куті атаки в 45 градусів коефіцієнти практично не змінюються при різних значеннях сили гравітації (на допустимих висотах польоту ракети). Щодо залежності від числа Маха, то орієнтовно вона подана наступним чином:

M	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
C_x	0.24	0.21	0.25	0.46	0.48	0.39

Ці дані можна апроксимувати кубічним сплайном, але, враховуючи їх наближений характер, достатньо скористатися кусково-лінійною апроксимацією.

Окрім того, що значення параметру C_x слід сприймати як ймовірнісне значення, необхідно також враховувати, що на всіх ділянках траєкторії вплив стану атмосфери досить непрогнозований як у векторному так і в абсолютному вимірі. Не дивно, що артилеристи при стрільбі на значні відстані враховують «поправки на вітер», а ракетники, перед стартом запускають зонти з метою уточнення параметрів атмосфери (тиск, сила та напрямок вітру) на різних висотах. Ці дані стосуються точки старту і на всій траєкторії польоту можуть значно відрізнятись.

Оскільки площа поздовжнього перерізу ракети становить біля 4 м^2 , то вплив потоку повітряних мас може бути досить суттєвим, зокрема, не лише на бокове зміщення, але й на піднімальну силу та швидкість руху в залежності від кута атаки ракети.

Всі ці описані вище розрахунки та співвідношення стосовно сили тяжіння та аеродинамічної сили (в якійсь мірі і стосовно природніх явищ) стосуються не лише пасивної ділянки траєкторії, але й активної. Разом з тим, на активній ділянці траєкторії увага в першу чергу приділяється визначенню сили тяги двигуна.

Загальні розрахунки для встановлення величини сили тяги реактивного двигуна ракети одержують виходячи із закону про зміну кількості руху газового потоку, який проходить через сопло двигуна.

Зокрема, встановлено, що величина сили тяги ракетного двигуна у невагомості (за відсутності сили гравітації та впливу стану атмосфери, аеродинамічних сил), визначається співвідношенням:

$$P_{\infty} = I_{ps} \cdot \dot{G}(t), \quad (4)$$

де I_{ps} – питомий імпульс, $\dot{G}(t)$ – вагові щосекундні витрати палива двигуном (встановлюються експериментальними дискретними табличними значеннями).

Питомий імпульс I_{ps} залежить від температури і визначається за допомогою лінійної довідкової таблиці. Для оперативно-тактичної ракети залежність питомого імпульсу від температури заряду можна апроксимувати за такими табличними даними:

Температура заряду, °C	Питомий імпульс, с
-40	262,6
10	264
50	265,2

На підставі натурних спостережень дослідження польотів об'єктів з твердопаливними реактивними двигунами встановлено ряд функціональних залежностей, які стосуються роботи двигуна, зокрема, показано, що сила тяги двигуна в атмосфері на висоті h залежить від сили тиску атмосфери на цій висоті та площі сопла. Її можна визначати за співвідношеннями:

$$P(h) = P_{\infty} - S_{\alpha} \cdot P_{\alpha}(h), \quad (5)$$

де S_{α} – площа сопла; P_{∞} – сила тяги двигуна у невагомості; $P_{\alpha}(h)$ – тиск атмосфери на висоті h , який визначається таблицями за властивостями атмосфери.

Площу сопла S_{α} для ракети оперативно-тактичного типу вважаємо рівною $0,15 \text{ м}^2$.

Тепер, щоб обчислити силу тяги двигуна $P(h)$, залишається обчислити силу тяги двигуна у невагомості P_{∞} . Для цього потрібно мати дані про витрати палива. Це знову ж таки табличні дані. Вони коливаються від 30 кгс/с на перших секундах польоту до 50 кгс/с на десятій секунді та 70 кгс/с на сороковій секунді, а далі відбувається спад при повному спорожненні паливних баків.

Наведені дані дозволяють сформуувати послідовність обчислювальних процедур для відшукування сили тяги двигуна.

Висновки. Дослідженню теорії польоту присвячено чимало наукових праць, але їх автори зазвичай намагаються уникати питань, пов'язаних з даними технічних характеристик та натурних експеримен-

тів літальних апаратів, що унеможливило дослідження задачі формування оптимальних траєкторій. Доводилося порівнювати різні типи апаратів та визначати «умовно» вірні значення. Запропонована математична модель для вирішення завдань прогнозування навігації безпілотної літального апарату з наведеними числовими значеннями основних його характеристик та інших необхідних вхідних даних дозволить досліджувати та формувати оптимізаційні траєкторії польоту. Зазначимо також, що деякі показники, наприклад, напрямок та швидкість руху вітру, необхідно сприймати з певним ступенем достовірності.

Список використаних джерел:

1. Габрінець В., Подольчак С. Оцінка надійності ракетного двигуна як складної технічної системи за недостатньої статистичної інформації. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*: науково-технічний журнал. Харків, 2018. № 4 (148). С. 36-43.
2. Ігдалов Й. М. та ін. Динамічне проектування ракет. Задачі динаміки ракет та їх космічних ступенів / за ред. акад. С. М. Конюхова. Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ, 2011. 274 с.
3. Корнійчук С. П. та ін. Сучасне озброєння і військова техніка Збройних Сил Російської Федерації. Довідник учасника ООС. Харків: ДІСА ПЛЮС, 2020. 1220 с.
4. Ракетна зброя – сукупність різних ракетних комплексів, ... (ТТХ-ракет-рф). URL: https://sprotyvg7.com.ua/wp-content/uploads/2023/06/ТТХ-ракет-рф-29_10_2022.pdf.
5. Щирба Віктор. Формування траєкторії керованих літальних апаратів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2024. Вип. 25. С. 139-145.

MATHEMATICAL MODEL OF STUDY THE AIRCRAFT FLIGHT TRAJECTORY

This work is devoted to the study of the unmanned aerial vehicle movement model. Attention is focused on the issue of studying the forces that determine the dynamics of movement, the resultant force is considered. Based on the fact that the equation of motion depends on the structural features and purpose of aircraft, and their arsenal is quite varied and multifaceted, the basis of the study is the tactical and technical characteristics (TSH) of operational-tactical missile systems.

The model on the passive part of the trajectory, where the nature of the equation of motion is determined only by gravity and aerodynamic forces, is considered in the paper. Taking into account the maximum flight height and the probabilistic nature of errors in the calculations, it is proposed to consider the force of gravity as constant along the entire trajectory. Therefore, all efforts are directed at determining the numerical values for determining the aerodynamic force. TSH missiles are of great importance here. It is worth noting that there are no real and reliable data about the rocket, in particular its

design and experimental data. They are either classified, or unreliable in advance (deliberately presented with some error), or are established experimentally with a certain degree of accuracy or probability. That is why the numerical values given in the paper should be taken as probabilistic.

In the active part of the movement trajectory, the main attention is paid to determining the engine's thrust. The given numerical values characterizing its force, the tabulated experimental values are conditionally correct, but the errors are insignificant. Data on the natural forces of air movement are even more uncertain.

This made it necessary to compare different types of rocket and determine «conditionally» correct values. Based on the proposed mathematical model, it is possible to solve the task of predicting the navigation of an unmanned aerial vehicle with the numerical values of its main characteristics and other necessary input data. This will make it possible to study and form optimization flight trajectories.

Key words: *aircraft, navigation, trajectory, engine thrust.*

Отримано: 20.12.2024