

УДК 536.2

DOI: 10.32626/2308-5916.2025-27.58-67

Р. С. Мусій, д-р фіз.-мат. наук, професор,**А. В. Кунинець**, канд. фіз.-мат. наук,**Б. Й. Бандирський**, канд. фіз.-мат. наук,**О. Г. Оришин**, канд. фіз.-мат. наук,**І. Г. Свідрак**, канд. тех. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ НАГРІВУ НЕФЕРОМАГНІТНОГО ДВОШАРОВОГО ПОРОЖНИСТОГО ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ЦИЛІНДРА ЗА ДІЇ НЕУСТАЛЕНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Запропоновано фізико-математичну модель для визначення та аналізу закономірностей поведінки тепла Джоуля у двошаровому неферомагнітному порожнистому електропровідному циліндрі за дії неусталеного електромагнітного поля в режимі з імпульсним модулюючим сигналом. Прийнято, що за такої електромагнітної дії, внаслідок її короткочасності, не враховуються можливі ефекти дифузійного перерозподілу тепла і тепловідведення. Відповідно процес нагріву зумовлений теплом Джоуля за рахунок незворотної поглинутої енергії електромагнітного поля. Записано вихідні співвідношення для знаходження визначальної функції осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля. Для побудови розв'язку використано квадратичну апроксимацію її розподілів у складових шарах циліндра по радіальній координаті та інтегральне перетворення Лапласа за часом. Записано вираз осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля та тепла Джоуля у складових шарах циліндра при його індукційному нагріві неусталеним електромагнітним полем. Чисельно проаналізовано зміну осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля і тепла Джоуля в часі та їх розподіл по товщині складових шарів циліндра, які виготовлені з міді та нержавної сталі, залежно від тривалості неусталеної електромагнітної дії та величини напруженості магнітного поля.

Ключові слова: двошаровий порожнистий електропровідний циліндр, неусталене електромагнітне поле, однорідна дія, осьова компонента вектора напруженості магнітного поля, тепло Джоуля, процеси нагріву.

Вступ. В сучасних технологічних процесах широко використовується обробка електропровідних елементів конструкцій з допомогою нестационарних електромагнітних полів (ЕМП). Ці ЕМП в більшості

випадків мають усталений і квазіусталений характер зміни в часі [1, с. 27-72; 2; 3, с. 36-60; 4, с. 55-98]. При обробці використовують також неусталені ЕМП різних типів [5, с. 108-170]. Електромагнітні поля в режимі з імпульсним модулюючим сигналом (РІМС) використовують для короткочасної технологічної теплової обробки. При цьому є актуальним інженерним завданням дослідити теплові процеси у трубчастих електропровідних елементах, зумовлені неусталеним ЕМП. Такі елементи використовуються в енергетичних і радіотехнічних пристроях різного цільового призначення [5, с. 108-170].

Визначення та аналіз тепла Джоуля і температурних режимів у однорідному та біметалевому пластинчастих елементах на основі одновимірної фізико-математичної моделі за короткочасного індукційного нагріву неусталеним ЕМП розглянуто в роботах [6; 7]. Таким чином в літературі достатньо висвітлено дослідження теплових і температурних режимів у електропровідних елементах пластинчастого типу. Однак, недостатньо вивчено закономірності теплових процесів у електропровідних елементах циліндричної геометрії за дії неусталених ЕМП, особливо двошарових, які є структурними елементами хвилеводів та антенно-фідерних систем. Неусталене ЕМП, що відповідає амплітудно-модульованим електромагнітним коливанням в режимі з імпульсним модулюючим сигналом (РІМС), створює у двошаровому порожнистому циліндрі внутрішні нестационарні джерела тепла Джоуля. При цьому, внаслідок короткочасності дії такого неусталеного ЕМП у даній роботі не враховуються можливі ефекти дифузійного перерозподілу тепла і тепловідведення. Тому, основна увага приділена саме теплу Джоуля, за рахунок незворотньо поглинутої енергії ЕМП.

Мета даної роботи полягає в дослідженні теплових процесів у двошаровому неферромагнітному порожнистому електропровідному циліндрі з внутрішнім тонким мідним покриттям на зовнішньому циліндрі (основі), виготовленому з нержавної сталі, за дії неусталеного ЕМП в РІМС за прийнятих вихідних припущень.

1. Формулювання задачі. Розглядається двошаровий порожнистий електропровідний циліндр, віднесений до циліндричної системи координат $O r \varphi z$. Вісь Oz співпадає з віссю симетрії циліндра з внутрішнім $r = r_0$ і зовнішнім $r = r_2$ радіусами. Радіус поверхні з'єднання складових шарів циліндра рівний $r = r_1$.

Матеріали кожного n -го ($n = 1, 2$) складового шару циліндра однорідні, ізотропні і неферромагнітні. Їх електрофізичні параметри: σ_n – коефіцієнт електропровідності та μ_n – магнітна проникливість приймаються сталими.

Електромагнітну дію в РІМС, яку використовували для електромагнітної термообробки циліндра математично описали виразом

$$H_{0z}(t) = kH_0(\exp(-\beta_1 t) - \exp(-\beta_2 t))\cos\omega t. \quad (1)$$

Тут H_0 – амплітуда синусоїдальних несучих електромагнітних коливань частоти ω ; β_1, β_2 – параметри, що характеризують часи фронтів наростання і спадання модулюючого імпульсу $\varphi(t) = \exp(-\beta_1 t) - \exp(-\beta_2 t)$; k – нормувальний множник, t – час.

Унаслідок такої електромагнітної дії (1) у кожному n -му ($n=1, 2$) складовому шарі циліндра індукуються вихрові струми. Ці струми при їх протіканні створюють у складових шарах циліндра об'ємно розподілені нестационарні джерела тепла Джоуля $Q^{(n)}$.

Відповідно цій фізичній моделі для визначення тепла Джоуля $Q^{(n)}$, спочатку необхідно визначити у кожному n -му ($n=1, 2$) шарі циліндра відмінну від нуля осьову компоненту $H_z^{(n)}$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)} = \{0; 0; H_z^{(n)}(r, t)\}$. Ця компонента є функцією радіальної змінної r та часу t .

Для знаходження функції $H_z^{(n)}(r, t)$ у кожному n -му ($n=1, 2$) шарі циліндра зі співвідношень Максвелла отримуємо рівняння

$$\frac{\partial^2 H_z^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} - \sigma_n \mu_n \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Рівняння (2) розв'язуємо за крайових умов

$$H_z^{(1)}(r_0, t) = H_z^-(t), \quad H_z^{(2)}(r_2, t) = H_z^+(t). \quad (3)$$

на внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_2$ поверхнях циліндра.

На поверхні $r = r_1$ з'єднання складових шарів циліндра мають місце умови ідеального електромагнітного контакту:

$$\begin{aligned} H_z^{(1)}(r_1, t) &= H_z^{(2)}(r_1, t), \\ \frac{\partial H_z^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} &= k_\sigma \frac{\partial H_z^{(2)}(r_1, t)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $k_\sigma = \sigma_1 / \sigma_2$. При відсутності неусталеного ЕМП в момент часу $t = 0$ початкова умова має вигляд

$$H_z^{(n)}(r, 0) = 0. \quad (5)$$

Знайшовши розв'язок початково-крайової задачі (2)-(5), отримуємо вираз компоненти $H_z^{(n)}$ в n -му шарі циліндра. За знайденою

функцією $H_z^{(n)}$ згідно співвідношень Максвелла [1, с. 32-35] запишемо вираз питомої густини тепла Джоуля

$$Q^{(n)} = \frac{1}{\sigma_n} \left(\frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} \right)^2 \quad (6)$$

в n -му шарі циліндра.

2. Визначення тепла Джоуля за електромагнітної дії в РІМС. Для побудови розв'язку початково-крайової задачі (2)-(5) апроксимуємо розподіли функцій $H_z^{(n)}$ в кожному n -му складовому шарі циліндра квадратичними поліномами

$$H_z^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 a_i^{(n)}(t) r^i. \quad (7)$$

Використовуючи такий підхід, як і в роботах [6, 7] та інтегральне перетворення Лапласа [6, 7] за часом t при крайових умовах (3)-(4) за електромагнітної дії в РІМС у вигляді (1), отримуємо вираз компоненти $H_z^{(n)}(r, t)$ вектора напруженості магнітного поля

$$H_z^{(n)}(r, t) = \frac{k_0 H_0}{2} \sum_{i=0}^2 \left(B_{i1}^{(n)} e^{-(\beta_1 - i\omega)t} + B_{i2}^{(n)} e^{-(\beta_2 - i\omega)t} + B_{i3}^{(n)} e^{-(\beta_1 + i\omega)t} + B_{i4}^{(n)} e^{-(\beta_2 + i\omega)t} + B_{i5}^{(n)} e^{p_1 t} + B_{i6}^{(n)} e^{p_2 t} \right) r^i. \quad (8)$$

Тут p_1 і p_2 – корені характеристичного рівняння задачі Коші для визначення інтегральних характеристик функції $H_z^{(n)}(r, t)$ [6, 7]. Відповідно формулі (6) питома густина тепла Джоуля $Q^{(n)}(r, t)$ в n -му шарі циліндра записується виразом

$$Q^{(n)}(r, t) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^{20} C_{ijl}^{(n)} e^{\alpha_l t} r^{i+j-2}. \quad (9)$$

Тут: вирази $B_{is}^{(n)}$ ($i = \overline{0,2}$, $s = \overline{1,6}$), $C_{ijl}^{(n)}$, ($i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,2}$, $l = \overline{1,20}$), α_l ($l = \overline{1,20}$) залежать від геометричних параметрів циліндра, частоти ω електромагнітних коливань, коренів p_1 і p_2 відповідного характеристичного рівняння, параметрів β_1 і β_2 модулюючого імпульса та електрофізичних характеристик σ_n , μ_n матеріалів складових шарів циліндра.

3. Комп'ютерний аналіз теплових процесів у циліндрі за електромагнітної дії в РІМС. Обчислення проводилися для циліндра з радіусами циліндричних поверхонь $r_0 = 0.0099m$, $r_1 = 0.010m$, $r_2 = 0.011m$.

Для наочності зміни в часі функції $H_z^{(n)}(r, t)$ і тепла Джоуля $Q^{(n)}(r, t)$ параметри електромагнітної дії в РІМС приймалися такими, що відповідають часу її тривалості $t_i = 10^{-4} \text{ s}$, за якої відбувається десять періодів електромагнітних коливань даної частоти. Частота несучих електромагнітних коливань приймалась рівною $\omega = 6.28 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$.

Внутрішній мідний шар є тонким покриттям на основі зовнішнього циліндра (основи), виготовленого з нержавної сталі.

На рис. 1 показано зміну в часі функції $H_z^{(n)}(r, t)$ на зовнішніх поверхнях циліндра (лінія 1) та на поверхні з'єднання його складових шарів (лінія 2).

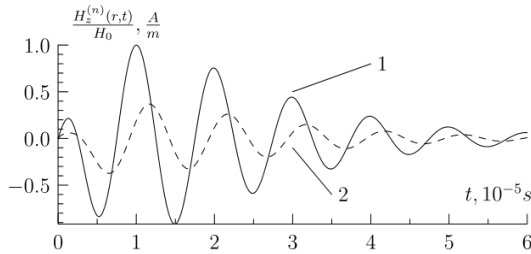


Рис. 1. Зміна в часі функції $H_z^{(n)}(r, t)$ на зовнішніх поверхнях циліндра (лінія 1) та на поверхні з'єднання його складових шарів (лінія 2)

Лінія 2 отримана за виконання умов ідеального електромагнітного контакту на поверхні з'єднання складових шарів циліндра.

Розподіл функції $H_z^{(n)}(r, t)$ по товщині складових шарів циліндра в моменти часу $t = 0, 1t_i$; $t = 0, 25t_i$; $t = 0, 05t_i$. (лінії 1-3) зображено на рис. 2.

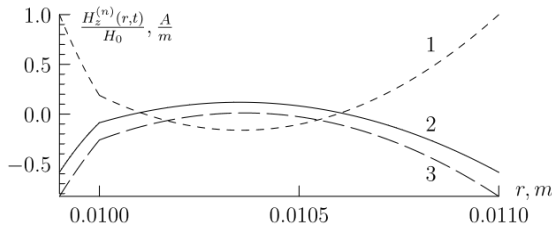


Рис. 2. Розподіл функції $H_z^{(n)}(r, t)$ по товщині складових шарів циліндра в моменти часу $t = 0, 1t_i$; $t = 0, 25t_i$; $t = 0, 05t_i$ (лінії 1-3)

На рис. 3, 4 показано зміну в часі тепла Джоуля $\frac{Q^{(n)}}{H_0^2}$ на внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_2$ поверхнях циліндра та на поверхні

з'єднання складових шарів $r = r_1$. Лінії 1, 2 на рисунках відповідають значенню тепла Джоуля на внутрішній і зовнішній поверхнях та його значенню у внутрішньому мідному та зовнішньому шарі, виготовленому з нержавної сталі, на поверхні їх з'єднання.

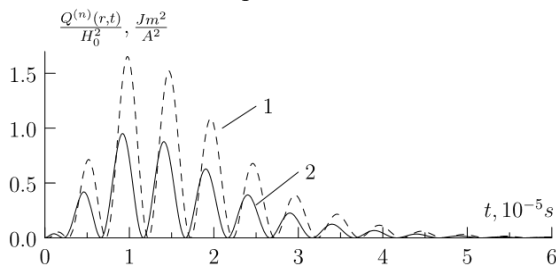


Рис. 3. Зміна в часі тепла Джоуля $\frac{Q^{(n)}}{H_0^2}$ на внутрішній $r = r_0$ (лінія 1) і зовнішній $r = r_2$ (лінія 2) поверхнях циліндра

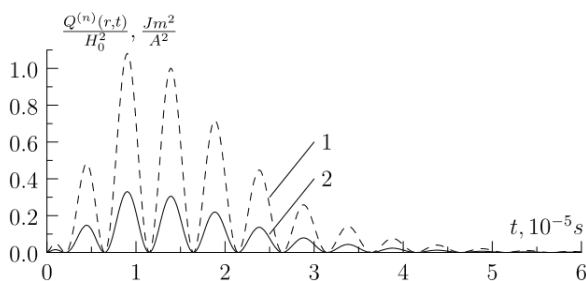


Рис. 4. Зміна в часі тепла Джоуля $\frac{Q^{(n)}}{H_0^2}$ на поверхні $r = r_1$ з'єднання

складових шарів циліндра. Лінії 1 відповідає значенню функції $\frac{Q^{(1)}}{H_0^2}$,

а лінія 2 – значенню функції $\frac{Q^{(2)}}{H_0^2}$ на поверхні $r = r_1$

Розподіл тепла Джоуля $\frac{Q^{(n)}}{H_0^2}$ по товщині складових шарів циліндра за тривалості $t_i = 10^{-4}s$, показано на рис. 5. Лінії 1-3 зображають розподіли тепла Джоуля в моменти часу $t = 0,1t_i$; $t = 0,05t_i$; $t = 0,25t_i$.

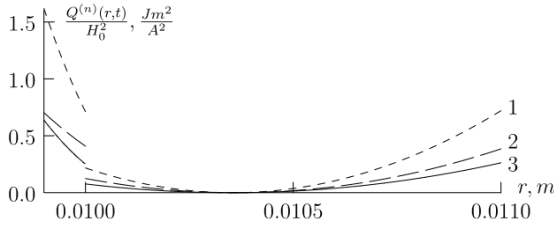


Рис. 5. Розподіл тепла Джоуля $\frac{Q^{(n)}}{H_0^2}$ по товщині складових шарів

циліндра в моменти часу $t = 0, 1t_i$; $t = 0, 05t_i$; $t = 0, 25t_i$ (лінії 1-3)

Приведений на рис. 5 розподіл максимальних значень тепла Джоуля $\frac{Q^{(n)}}{H_0^2}$ у складових шарах циліндра має місце у момент часу $t = 0, 1t_i$, що відповідає максимуму імпульса, що модулює несучі електромагнітні коливання, частоти $\omega = 6.28 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$. Отримано, що максимальні значення тепла Джоуля $\frac{Q^{(n)}}{H_0^2}$ на внутрішній мідній поверхні приблизно в 2 рази більші, ніж на зовнішній поверхні шару, виготовленого з нержавної сталі.

На рис. 6 зображено залежності максимальних значень тепла Джоуля $Q^{(n)}$ на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра від величини H_0 напруженості магнітного поля, рівної амплітуді несучих синусоїдальних електромагнітних коливань частоти $\omega = 6.28 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$, за тривалостей електромагнітної дії $t_i = 100\text{s}$; $t_i = 200\text{s}$.

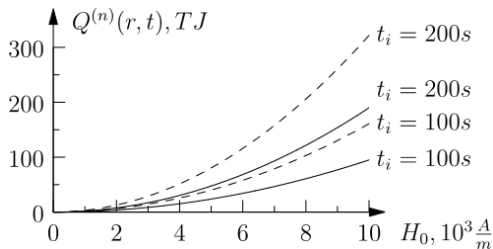


Рис. 6. Залежності максимальних значень тепла Джоуля $Q^{(n)}$ на внутрішній $r = r_0$ (штрихові лінії) та зовнішній $r = r_2$ (суцільні лінії) поверхнях циліндра від величини H_0 за тривалостей електромагнітної дії $t_i = 100\text{s}$; $t_i = 200\text{s}$

Отримано, що на внутрішній мідній поверхні значення тепла Джоуля $Q^{(n)}$ за величини $H_0 = 10^4 \text{ A/m}$ за тривалості $t_i = 200\text{s}$ досягає величини порядку 322 TJ , а на зовнішній сталевій поверхні – величини порядку 190 TJ .

На рис. 7 показано зміну в часі максимальних значень тепла Джоуля $\frac{Q^{(n)}}{H_0^2}$ на внутрішній $r = r_0$ та зовнішній $r = r_2$ поверхнях циліндра за тривалостей електромагнітної дії $t_i = 50\text{s}$; $t_i = 100\text{s}$; $t_i = 200\text{s}$.

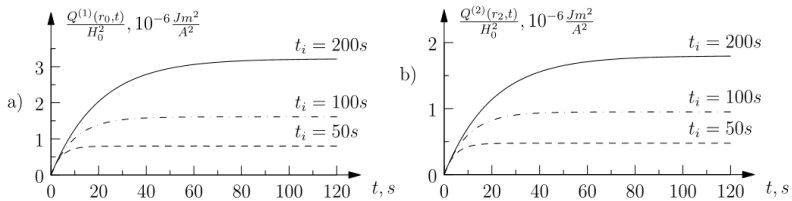


Рис. 7. Зміна в часі максимальних значень тепла Джоуля $\frac{Q^{(n)}}{H_0^2}$ на

внутрішній $r = r_0$ (а) та зовнішній $r = r_2$ (б) поверхнях циліндра за тривалостей електромагнітної дії $t_i = 50\text{s}$; $t_i = 100\text{s}$; $t_i = 200\text{s}$

Встановлено, що вихід максимальних значень тепла Джоуля $\frac{Q^{(n)}}{H_0^2}$ на усталений режим відбувається на обидвох внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра за час $t \approx 0.5t_i$.

Висновки. Сформульовано початково-крайову контактну задачу електродинаміки для довгого порожнистого двошарового неферромагнітного електропровідного циліндра за дії неусталеного електромагнітного поля. Запропоновано методику побудови її розв'язку, яка полягає на використанні квадратичної апроксимації за радіальною змінною осевої компоненти вектора напруженості магнітного поля по товщині складових шарів циліндра. Це дало змогу задовольнити точно всі задані крайові умови на цю функцію, як на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра, так і на поверхні з'єднання його складових шарів. За часовою змінною використано перетворення Лапласа. За неврахування можливих ефектів дифузійного перерозподілу тепла і тепловідведення, знайдено вирази розглядуваної компоненти вектора напруженості магнітного поля та питомої густини тепла Джоуля за дії неусталеного електромагнітного поля. Проведено чис-

ловий аналіз зміни в часі та розподілів по товщині складових шарів циліндра даної компоненти і тепла Джоуля для двошарового порожнистого циліндра з тонким внутрішнім мідним покриттям на основі з нержавної сталі залежно від тривалостей неусталеної електромагнітної дії та величини напруженості магнітного поля.

Виявлені закономірності процесу нагріву розглядуваного циліндра можуть бути науковою основою для прогнозування теплових режимів двошарових трубчастих елементів за дії неусталеного електромагнітного поля.

Список використаних джерел:

1. Hachkevych O. R. Thermomechanics of electrically conductive bodies under the action of quasi-steady electromagnetic fields. Kyiv: Naukova Dumka, 1992. 192 p. (in Russian).
2. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Методика чисельного дослідження електромагнітних і температурних полів при індукційному нагріві електропровідних циліндричних тіл. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2002. Т. 44. № 4. С. 140-148.
3. Rudnev V., Loveless D., Cook R. L. Handbook of induction heating. CRC press. 2017.
4. Batygin Yu. V., Lavinsky V. I., Himenko L. T. Impulse magnetic fields for advanced technologies. Harkov: MOST-Tornado Publ., 2003. 288 p. (in Russian).
5. Asai S. Electromagnetic Processing of Materials. Springer, Netherlands. 2012.
6. Musij R., Pukach P., Kohut I., Vovk M., Šlahor L. Determination and analysis of joule's heat and temperature in an electrically conductive plate element subject to short-term induction heating by a non-stationary electromagnetic field. *Energies*. 2022. Vol. 15. Iss. 14.
7. Musij R., Pukach P., Melnyk N., Vovk M., Šlahor L. Modeling of the temperature regimes in a layered bimetallic plate under short-term induction heating. *Energies*. 2023. Vol. 16.

INVESTIGATION OF THE HEATING PROCESSES OF A NONFERROMAGNETIC TWO-LAYER HOLLOW ELECTROCONDUCTIVE CYLINDER UNDER THE ACTION OF AN UNSTEADY ELECTROMAGNETIC FIELD

A physical and mathematical model for determining and analysing the regularities of Joule heat behaviour in a two-layer nonferromagnetic hollow conductive cylinder under nonstationary electromagnetic action is proposed. The initial relations for finding the determinant function for the axial component of the magnetic field intensity vector are given. To construct the solution, a quadratic approximation of its distributions in the constituent layers of the cylinder by the radial coordinate and the integral Laplace transform by time are applied. The expression of the axial component of the magnetic field intensity vector and the Joule heat in the component layers of the cylinder during its induction heating by an unsteady electromagnetic field is obtained. The change in the axial component of the magnetic field intensity vector and Joule heat in time and their distribution over the

thickness of the cylinder's component layers made of copper and stainless steel, depending on the duration of the unsteady electromagnetic action and the magnitude of the magnetic field intensity, are analysed numerically.

Key words: *two-layer hollow electrically conductive cylinder, unsteady electromagnetic field, homogeneous action, axial component of the magnetic field intensity vector, Joule heat, heating processes.*

Отримано: 9.06.2025

УДК 681.5.015.52

DOI: 10.32626/2308-5916.2025-27.67-81

В. Д. Павленко, д-р техн. наук, професор,

Д. К. Лукашук, аспірант

Національний університет «Одеська політехніка», м. Одеса

АНАЛІЗ РЕДУКЦІЇ ДІАГНОСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОКОРУХОВОЇ СИСТЕМИ У ПСИХОФІЗІОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Досліджуються можливості редукції інформаційних моделей око-рухової системи людини, що побудовані на основі даних експериментів з айтрекінгу у форматі «вхід–вихід». Застосовуються інтегральні моделі Вольтерри другого порядку, які дозволяють враховувати динамічні та нелінійні властивості досліджуваного об'єкта. Ідентифікація моделей виконується методом найменших квадратів на основі відгуків ОРС на тестові ступінчасті сигнали. Отримані багатовимірні перехідні характеристики використовуються для побудови множини просторів діагностичних ознак, зокрема простору евристичних ознак, а також просторів, що сформовані за допомогою семплінгу та вейвлет-декомпозиції. Здійснено аналіз варіативності моделей залежно від стану респондента, а також проведено редукцію моделей шляхом вибору найбільш інформативних компонент. На основі сформованих ознак виконано класифікацію психофізіологічного стану із застосуванням байєсівського класифікатора та методу опорних векторів. Ефективність класифікації оцінюється за критерієм вірогідності правильного розпізнавання з урахуванням стійкості до шумів. Представлені результати підтверджують доцільність використання квадратичних моделей для побудови діагностичних ознак в інтелектуальних технологіях оцінювання психофізіологічного стану людини.

Ключові слова: *психофізіологічний стан, око-рухова система, моделювання, багатовимірні перехідні характеристики, технологія айтрекінгу, діагностична модель, аналіз редукції, машинне навчання, метод Байєса, метод опорних векторів.*