

УДК 004.56

DOI: 10.32626/2308-5916.2025-27.128-139

С. А. Положаєнко, д-р техн. наук, професор,**А. Ю. Прокоф'єв**, аспірант

Національний університет «Одеська політехніка», м. Одеса

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ БАЖАНОГО ПОРЯДКУ ЛОКАЛЬНОЇ ПОХИБКИ ПРИ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЗІ ЗРОСТАЮЧОЮ ТОЧНІСТЮ

Одним з основних якісних показників обчислювальних засобів є точність результатів розв'язування ними прикладних задач, зокрема, задач моделювання та управління динамічними системами. Однак, не дивлячись на широке використання засобів обчислювальної техніки (ОТ), проблему оцінки точності обчислень не можна вважати розв'язаною, а її актуальність зростає у зв'язку зі швидким розвитком та поширенням кібернетичних засобів різного призначення. Гострота проблеми полягає у складності аналізу похибок обчислень, яка призводить до громіздкості аналітичних обґрунтувань та до великого обсягу обчислень, необхідних для отримання конкретних числових даних.

Для рішення багатьох технічних та науково-дослідницьких задач широко застосовуються як універсальні, так і спеціалізовані засоби ОТ. Характерною відмінністю останніх від універсальних засобів ОТ є навмисно вузький клас алгоритмів, які реалізуються, орієнтований на розв'язування обмеженого кола прикладних задач. При цьому, природно, передбачається досягнення низки певних (у порівнянні з універсальними засобами ОТ) переваг, до яких, зазвичай, відносяться один або група факторів, таких, як підвищена швидкодія, неаналітичний спосіб розв'язування задач (для аналогових спеціалізованих засобів ОТ), зменшені масо-габаритні характеристики та вартість, тощо. Слід зазначити, що проблема точності є актуальною як для універсальних, та і для спеціалізованих засобів ОТ, дещо трансформуючись, в залежності від типу засобу та принципу його дії, наприклад, своєрідність первинних похибок.

В якості шляху, який дає змогу спростити наступний за процесом розв'язування задачі не менш трудомісткий процес аналізу точності результату (або підвищити його оперативність), можна представити перенесення, що найменше частини цього (останнього) процесу на період, що передусе розв'язуванню основної задачі. Цей шлях полягає у попередньому обчисленні залежностей похибки, а, практично, її характеристик, від характеристик первинних похибок, пов'язаних із реалізацією, зокрема математичних моделей (ММ) динамічних систем в прикладних задачах їх моделювання та управління.

Ключові слова: динамічна система, математична модель, локальна похибка, метод зі зростаючою точністю.

Вступ. Числові методи розв'язання рівнянь динаміки (або інших математичних співвідношень, що утворюють ММ динамічних систем) є процедурою *покрокового* отримання шуканої функції. При цьому обчислювальний процес природно розбивається на відносно постійні за часом частини, які відповідають визначенню шуканої функції на певному кроці інтегрування. Крім того обчислювальний процес розбивається всередині кроку інтегрування також на відносно постійні за часом частини, які відповідають визначенню значень правої частини системи рівнянь, що розв'язується (на прикладі ММ у вигляді диференційного рівняння)

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0, \quad (1)$$

де $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ – вектор змінних стану; $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ – вектор сигналів управління; $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ – вектор-функція; t – незалежний параметр часу.

Розглянемо можливості процедур числового розв'язку (1) щодо організації контролю (самоконтролю) процесів обчислень. Для організації контролю (самоконтролю) потрібно мати еталонні величини, з якими порівнюються результати обчислень. В якості еталонні величини можуть використовуватися проконтрольовані результати попередніх обчислень або результати, при отриманні яких ймовірність збою мала.

Для будь-яких методів числового розв'язування рівнянь динаміки виду (1) контроль збоїв можна організувати шляхом порівняння результатів, отриманих на поточному та наступному кроках інтегрування, відповідно. Наявність чи відсутність збоїв визначається перевіркою умови

$$\xi = \rho(y_i, y_{i+1}) \in D, \quad (2)$$

де ξ – міра D – область допустимих значень цієї міри близькості значень y_i та y_{i+1} ;

Розміри області D залежать від зміни рішення від кроку до кроку та визначають точність контролю. Якщо межі області D відповідають максимально можливій різниці значень y_i та y_{i+1} , на всьому кроці інтегрування за відсутності збоїв, то похибка, яка може бути пропущена при контролі, дорівнює подвоєному значенню розмірів області D , що випливає з (2), оскільки в останній необхідно замінити значення y_{i+1} на y_i . При цьому точність контролю може виявитися незадовільною.

Для контролю похибок, викликаних збоями та відмовами, можуть використовуватися методи контролю методичної похибки чис-

лового розв'язку на етапі інтегрування або особливості побудови обчислювальних алгоритмів.

У методах «прогнозу – корекції» [1-3] по різниці $\xi = |y_f - y_c|$ між прогнозованим y_f і скорегованим y_c значеннями шуканої функції можна робити висновки про наявності збою у роботі апаратури. Однак, існуючий взаємозв'язок між значеннями y_f та y_c знімає достовірність контролю.

Покажемо це на прикладі вдосконаленого методу Ейлера-Коші [4, 5]. Нехай прогноз здійснюється за формулою:

$$y_{i+1} = y_i + h f_i, \quad (3)$$

Де h – крок інтегрування; $f_i = f(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_i)$, а корекція здійснюється у відповідності до виразу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f_i + \tilde{f}_{i+1}), \quad (4)$$

де $\tilde{f}_{i+1} = f(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{U}, t_{i+1})$.

Як видно з (3) і (4), на одному кроці інтегрування двічі обчислюється функція $f(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_i)$ у точках t_i та t_{i+1} . Оскільки цей процес, як правило, займає основний обсяг обчислювальної роботи, припустимо, що збій стався в момент обчислення $f(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_i)$ і значення функції f_i отримано з похибкою Δf_i . Тоді значення функції, яке може бути отримане у відповідності до формули (3.3), буде

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h(f_i + \Delta f_i) = y_i + h f_i + h \Delta f_i. \quad (5)$$

Тут величина $\Delta y_{i+1} = h \Delta f_i$ – похибка в значенні прогнозу.

Розкладемо функцію $\tilde{f}_{i+1}$ в ряд Тейлора по y і, при цьому, обмежимося двома першими членами

$$\tilde{f}_{i+1} = f_i + \frac{\partial f_i}{\partial y} h f_i + \frac{\partial f_i}{\partial t} h.$$

Підставимо в останній вираз для $\tilde{f}_{i+1}$ значення функції f_i з похибкою, в результаті чого отримаємо

$$\tilde{f}_{i+1} = f_i + \frac{\partial f_i}{\partial y} h(f_i + \Delta f_i) + \frac{\partial f_i}{\partial t} h.$$

Обчислимо значення функції y_{i+1} у відповідності до формули (4)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[(f_i + \Delta f_i) + f_i + \frac{\partial f_i}{\partial y} h(f_i + \Delta f_i) + \frac{\partial f_i}{\partial t} h \right]. \quad (6)$$

Різниця між прогнозованим (5) та скорегованим (6) значеннями буде дорівнювати

$$\xi = |\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}| = \frac{h}{2} \left| \Delta f_i \left(1 - \frac{\partial f_i}{\partial y} h \right) - h \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} f_i + \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) \right|$$

звідки видно, що величина ξ залежить від величини похідних $\partial f_i / \partial y$ та $\partial f_i / \partial t$. Наявність значної похибки у скорегованому значенні $\Delta y_{i+1} = h \Delta f_i$ може бути «непоміченим», якщо величини цих похідних малі. Наявність множника $h/2$ при малих h знижує «чутливість» величини ξ до похибок, які викликані збоями при обчисленні f_i .

Мета дослідження. Метою роботи є розробка методу контролю достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем, який, на відміну від методів «прогноз – корекція», забезпечує послідовне отримання шуканих функцій стану динамічної системи з порядком точності локальної похибки, що (порядок) збільшується.

Викладення основного матеріалу дослідження. Відомі методи «прогноз – корекція» (описані, наприклад, в [6-9]) можна перетворити (модифікувати) в *ітераційну процедуру*, де число ітерацій визначається точністю співпадіння двох послідовних наближень. При похибці, яку викликано збоєм, число ітерацій може різко зрости, крім того, що більш суттєво, процес може збігатися в точці, яка не має нічого спільного із шуканим розв'язком.

На відміну від модифікованих методів «прогноз – корекція» запропоновано метод *зі зростаючою точністю обчислень*, сутність якого буде полягати у послідовному отриманні значення функції на кроці інтегрування з порядком точності локальної похибки, що збільшується (суть – похибки на кроці інтегрування). Очевидно, що для довільного порядку точності r , можна записати:

$$y_{i+1}^{(r)} = y_i^{(r)} + \frac{h}{2} \left[f \left(y_i^{(r)}, u_i, t_i \right) + f \left(y_{i+1}, u_{i+1}, t_{i+1} \right) \right], \quad (7)$$

$$y_{i+1}^{(r-1)} = y_i^{(r)} + h f \left(y_i^{(r)}, u_i, t_i \right), \quad (8)$$

де верхній індекс вказує на порядок локальної похибки наближеного значення.

Порівнюючи значення $y_{i+1}^{(r-1)}$ та $y_{i+1}^{(r)}$ між собою можна зробити висновок щодо локальної похибки розв'язку. Цей самий прийом можна застосувати і для виявлення похибок від збоїв. Таким чином, якщо на попередньому кроці не було збою, то похибка при визначенні $y_{i+1}^{(r-1)}$ може відбутися тільки за умови реалізації виразу (8).

Інакше кажучи, на кожному кроці інтегрування маємо еталонне значення $y_{i+1}^{(r-1)}$, достовірність якого визначається ймовірністю збою при обчисленнях за формулою (8). І в цьому випадку величина $\xi = \left| y_{i+1}^{(r-1)} - y_{i+1}^{(r)} \right|$ визначається різницею залишкових членів і є малою величиною порядку $O(h^2)$. Якщо при визначенні $y_{i+1}^{(r-1)}$ відбувся збій та отримано значення з похибкою, то при визначенні $y_{i+1}^{(r)}$ буде використано значення похідної $\frac{\partial f(y + \Delta y, u, t_{i+1})}{\partial y}$, що може, в загальному випадку, знизити достовірність контролю, заснованого на порівнянні $y_{i+1}^{(r)}$ з $y_{i+1}^{(r-1)}$.

Враховуючи обсяг обчислень, а, відповідно, і ймовірність збою, для процедури (7), (8) менше, ніж для інших *однокрокових* методів того ж порядку точності відносно кроку h , а також той факт, що ймовірність збою при обчисленні $y_{i+1}^{(r-1)}$ значно менша за ймовірність збою при обчисленні функції $f(y, u, t)$, коли остання має складний вигляд, слід признати доцільною (з точки зору контролю збоїв) організацію процесу контролю з використанням методу зі *зростаючою точністю обчислень* другого порядку, тобто: $(r-1) = 2$.

Сформулюємо вимоги, яким повинен відповідати алгоритм, що реалізує метод зі зростаючою точністю обчислень, і який забезпечує зручність організації контролю та корекції розв'язку при збоях [10, 11]. Зазначимо, що контроль слід проводити шляхом порівняння значень функції, отриманих з різною точністю у точці (вузлі) інтегрування t_{i+1} . При цьому перше значення має бути отримано *без похибок*, оскільки воно є *еталонним*. Після порівняння наступного значенням функції $f(y, u, t)$ в точці t_{i+1} , яке підвищується за ступенем точності, з еталонним (тобто з початковим, яке, як зазначено, отримано без похибки), воно само стає еталонним. Далі процедура повторюється.

Очевидно, що описаний процес легко організувати, наприклад, в методі другого порядку точності ($(r-1) = 2$) з використанням виразів (7), (8). В даному випадку, при обчисленні $y_{i+1}^{(2)}$ не обчислюється функція $f(y, u, t)$, а використовується значення $f\left(y_{i+1}^{(2)}, u_{i+1}, t_{i+1}\right)$, отримане на попередньому кроці інтегрування, що значно зменшує ймовірність появи збою при обчисленні значення $y_{i+1}^{(2)}$.

Алгоритм, що реалізує метод зі зростаючою точністю обчислень повинен відповідати наступним вимогам:

1. Процес обчислень на кроці інтегрування повинен починатися з визначення функції f в точці t_{i+1} . При цьому не обчислюється функція $f(y, u, t_{i+1})$, а використовується значення функції f , отримане та проконтрольоване при обчисленні найбільш точного значення розв'язку системи (3.1) на попередньому кроці інтегрування. Розрахункова формула для отримання першого наближеного значення $y(t_i + h)$ з локальною похибкою $O(h^2)$ має вигляд

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i^{(r)} + h f(y_i^{(r-1)}, u_i, t_i),$$

де r – порядок локальної похибки наближеного значення розв'язку; $f(y_i^{(r-1)}, u_i, t_i)$ – оцінка похідної, яку використано при визначенні $y_i^{(r)}$.

Якщо знехтувати умовою однокроковості, та залучати інформацію щодо задачі, яка розв'язується, на відрізку більшим, ніж крок інтегрування h , можна збільшити порядок точності першого наближеного значення функції $y(t_i + h)$. При побудові багатокрокової процедури для отримання першого наближення функції в точці t_{i+1} можна застосувати оцінки похідної отриманої $\frac{\partial f(y + \Delta y, u, t_{i+1})}{\partial y}$, отриманої всередині кроку $[t_{i-1}, t_i]$.

Визначення правильності обчислень по формулі (7) здійснюється шляхом перевірки умови

$$\xi \in D, \quad (9)$$

де $\xi = \xi(y_{i+1}^{(2)}, y_{i+1}^{(3)})$ – міра точності обчислень; D – допустима область значень цієї міри.

В разі невиконання умови (9) корекція хибного розв'язку відбувається перерахунком значень $y_{i+1}^{(3)}$, або заміною $y_{i+1}^{(3)}$ на $y_{i+1}^{(2)}$. В останньому випадку буде внесено похибку, що визначається різницею залишкових членів у відповідних формулах і є малою величиною порядку $O(h^2)$. При цьому час корекції буде випадковою величиною з математичним очікуванням

$$M[T_{\text{кор}}] = (t_{\text{наб}} + t_{\text{оп.к}}) \sum_{m=0}^H C_H^m p^m q^{H-m},$$

де $t_{\text{наб}}$ – час обчислення чергового наближення функції $y(t)$ в точці t_{i+1} ; $t_{\text{оп.к}}$ – час, який займає операція контролю; $H = kN$ (k – число розбиттів щодо отримання розв'язку із зростаючою точністю, N – число кроків інтегрування); p – ймовірність збою при обчисленні чергового наближення; $q = 1 - p$.

Математичне очікування загального часу розв'язування за N кроків обчислень складає

$$M[T] = H(t_{\text{наб}} + t_{\text{оп.к}}) + M[T_{\text{кор}}]. \quad (10)$$

Якщо корекція здійснюється заміною хибного значення $y_{i+1}^{(r)}$ на найближче за точністю значення цієї функції у точці t_{i+1} , то у розв'язок буде внесено похибку

$$\xi = y_{i+1}^{(l+1)} - y_{i+1}^{(l)} = \eta_{i+1}^{(l+1)} - \eta_{i+1}^{(l)},$$

де $y_{i+1}^{(l)}$ та $y_{i+1}^{(l+1)}$ – послідовні наближення функції $y(t)$ відповідно з порядками локальної похибки l та $(l+1)$; $\eta_{i+1}^{(l)}$ та $\eta_{i+1}^{(l+1)}$ – малі величини відповідно з порядками малості h^l та h^{l+1} .

2. Число розбиттів k (тобто число значень $y_{i+1}^{(r)}$, які отримано зі зростаючою точністю на відрізку $[t_i, t_{i+1}]$) можна обрати, мінімізуючи (10) при обмеженнях на величину $\xi = (y_{i+1}^{(l+1)} - y_{i+1}^{(l)})$, або навпаки, мінімізуючи ξ при обмеженні на $M[T]$. Однак, практично $t_{\text{наб}} \gg t_{\text{оп.к}}$, а тому доцільно при синтезі алгоритму методу зі зростаючою точністю обирати максимальне число розбиттів k , яке можливе для методу обраного порядку точності r .

Оцінимо головний член похибки, застосовуючи для цього правило Рунге [12, 13]. В даному випадку використання даного правила зводиться до наступного. Для деякої точки t відрізка $[t_0, t_N]$ методом k -го порядку точності послідовно можна отримати наближені значення функції y_{h_1} та y_{h_2} на кроках $h_1 \neq h_2$, відповідно. Визначимо величину:

$$\xi(t) = \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^k - h_1^k}.$$

Тоді, з урахуванням величини головного члена похибки для кожного із значень $h = h_1$ та $h = h_2$

$$\xi_1 = h_1^k \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^k - h_1^k} \text{ та } \xi_2 = h_2^k \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^k - h_1^k},$$

можна зробити висновок щодо точності обчислень.

При рівномірному кроці розбиття відрізка $[t_0, t_N]$, тобто, якщо $h_1 = h$, а $h_2 = 2h$, вираз для головного члена похибки набуде наступного вигляду:

$$\xi = y - y_h \approx \frac{y_h - y_{2h}}{2^k - 1}.$$

В залежності від обчисленої величини ξ , для отримання заданої точності, крок h слід або зменшувати, або збільшувати (хоча в останньому випадку досягнута розрахункова точність і буде переважати задану, однак може значно зрости час обчислень, а також може погіршитися збіжність розв'язку).

Похибка, викликана збоєм та така, що перевищує допустиме значення оцінки головного члена похибки $\xi_{\text{доп}}$, буде виявлена та усунута шляхом перерахунку із зменшенням кроку h . Правило Рунге [14] потребує додаткових обчислень, що значно збільшує витрати часу та ймовірність похибок *першого роду* (інакше – α -похибок, тобто робиться помилково-узгоджуючий висновок про те, що відкидається вірна гіпотеза), а тому застосування даного правила в системах управління проблематично (або, навіть, неприпустимо). Слід також зазначити, що застосування при обчисленнях змінного кроку, тобто $h \neq \text{const}$, в управляючих системах ускладнюється також наявністю сигналів управління, які необхідно при зміні кроку h або попередньо запам'ятати, або використовувати інтерполяційні формули, що вносять додаткову похибку у розв'язок.

Тому, при оцінці похибок обчислень для систем управління, покажемо можливість застосовування *квадратурних формул*. Використаємо віднайдені за основним алгоритмом значення y_i , $i = \overline{1, N}$ із застосуванням наступної квадратурної формули

$$y(t_i) = y_0^* + \int_{t_0}^{t_i} f(y^*, u, t) dt,$$

де y^* – точне значення функції, і тоді можна отримати

$$\bar{y}_N = y_0^* + \sum_{i=0}^N A_i f(y_i, u_i, t_i), \quad (11)$$

де A_i – постійні коефіцієнти.

Висновок щодо наявності похибки робиться шляхом перевірки умови:

$$\xi = |y_N - \bar{y}_N| \leq \xi_{\text{доп}},$$

де $\xi_{\text{доп}}$ – допустиме значення величини похибки ξ .

Слід мати на увазі, що застосування виразу (11) при досить великому значенні N може, в свою чергу, призвести до чималого значення $\xi_{\text{доп}}$, і, тим самим, збільшити ймовірність похибок *другого роду* (інакше – β -похибок, тобто робиться помилково-неузгоджуючий висновок про те, що приймається невірна гіпотеза).

Останнє випливає з посилання про те, якщо при збої значення y_N отримано з похибкою, то з похибкою буде отримано і значення $\bar{y}_N$. Тобто будуть порівнюватися дві спотворені збоєм величини, які мають зв'язок через похідні. А цей факт може призвести до зниження якості контролю.

Виконаємо **аналітичне дослідження** запропонованого методу зі зростаючою точністю обчислень.

В якості прикладу розглянемо застосування запропонованого методу в задачі для *другого порядку точності*. Тоді аналоги виразів (7) та (8) можна записати у наступному вигляді:

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i^{(3)} + \frac{1}{2} h \left[f(y_i^{(s)}, u_i, t_i) + f(y_{i+1}, u_{i+1}, t_{i+1}) \right], \quad (12)$$

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i^{(3)} + h f(y_i^{(s)}, u_i, t_i), \quad (13)$$

де верхній індекс показує порядок локальної похибки наближеного значення (s – заданий порядок точності).

Порівнюючи $y_{i+1}^{(3)}$ та $y_{i+1}^{(2)}$ між собою, можна робити висновок щодо локальної похибки розв'язку. Цей самий прийом можна застосовувати і для віднаходження збоїв та похибок.

При $s=3$ процедура (12), (13) переходить в удосконалений метод Ейлера-Коші. При $s=2$ на кроці інтегрування робиться одне обчислення функції $f(y_i, u_i, t_i)$. Це ж значення похідної використовується на наступному кроці при обчисленні $y_{i+2}^{(2)}$.

Таким чином, якщо на попередньому кроці не було збою, то похибка при визначенні $y_{i+1}^{(2)}$ може відбутися тільки при реалізації виразу (Б.2).

Очевидно, що на кожному кроці інтегрування можна отримати еталонне значення $y_{i+1}^{(2)}$, достовірність якого визначає ймовірність

збою при застосуванні виразу (Б.2). Тоді величина $\xi = |y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(3)}|$ визначається різницею залишкових членів і є малою величиною порядку $O(h^2)$. В разі виникнення при визначенні $y_{i+1}^{(2)}$ збою та отриманні значення з похибкою, то при визначенні $y_{i+1}^{(3)}$ слід використовувати значення похідної $\frac{\partial f(y + \Delta y, u, t_{i+1})}{\partial y}$. Однак, слід мати на увазі, що на достовірність контролю може впливати лише порівняння значень $y_{i+1}^{(3)}$ та $y_{i+1}^{(2)}$.

Наступним прикладом розглянемо застосування методу зі зростаючою точністю у випадку четвертого порядку точності. Тоді алгоритм методу набуде вигляду:

$$y_{i+1}^{(5)} = y_i^{(5)} + \frac{1}{6}h \left[f(y_i^{(s)}, t_i) + 4f\left(y_{i+2/3}, t_i + \frac{1}{2}h\right) + f\left(y_{i+1}^{(4)}, t_i + h\right) \right], \quad (14)$$

$$y_{i+1/2}^{(4)} = y_i^{(5)} + \frac{1}{6}8h \left[2f(y_i^{(s)}, t_i) + 3f\left(y_{i+2/3}, t_i + \frac{2}{3}h\right) + f\left(y_{i+1}^{(4)}, t_i + h\right) \right], \quad (15)$$

$$y_{i+1}^{(4)} = y_i^{(5)} + \frac{1}{4}h \left[f(y_i^{(s)}, t_i) + 3f\left(y_{i+2/3}, t_i + \frac{2}{3}h\right) \right], \quad (16)$$

$$y_{i+2/3}^{(3)} = y_i^{(5)} + \frac{2}{3}h f\left(y_{i+1/3}^{(2)}, t_i + \frac{1}{3}h\right), \quad (17)$$

$$y_{i+1/3}^{(2)} = y_i^{(5)} + \frac{1}{3}h f\left(y_i^{(s)}, t_i + \frac{1}{3}h\right), \quad (18)$$

де $i = 4$.

Функція управління не враховувалася (тобто $f(y_i^{(s)}, t_i) \equiv f(y_i^{(s)}, u_i, t_i)$).

У випадку алгоритму (14)-(18) контроль обчислень можна організувати, порівнюючи величини $y_{i+1}^{(4)}$ та $y_{i+1}^{(5)}$.

Аналітичне дослідження запропонованого методу контролю зі зростаючою точністю обчислень показує, що можливо організувати контроль шляхом розв'язування рівнянь динаміки з метою виявлення похибок, які спричинено збоями та відмовами в роботі засобів ОТ. При цьому основною перевагою запропонованого методу є простота алгоритму та незначний обсяг обчислень. Однак достовірність точного контролю може виявитися незадовільною через *взаємовплив*

величин, на підставі порівняння яких робиться висновок щодо наявності похибок в процесі обчислень.

Висновки. Визначено можливості контролю достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем в процесах їх моделювання та управління. Запропоновано метод *зі зростаючою точністю обчислень*, який, на відміну від базового та модифікованого методів «прогноз – корекція», дозволяє послідовно (в тому числі – і на окремих кроках інтегрування) отримувати значення шуканої функції стану динамічних систем з порядком точності локальної похибки, що збільшується. Причому, порядок точності може бути завдано попередньо, до виконання основних етапів числової реалізації ММ динамічної системи.

Список використаних джерел:

1. Андруник В. А. та ін. Чисельні методи в комп'ютерних науках. Львів: Новий світ – 2000, 2017. 470 с.
2. Волонтир Л. О., Зелінська О. В., Потапова Н. А., Чіков І. А. Чисельні методи: навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2020. 322 с.
3. Лященко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи: підручник. Київ: Либідь, 1996. 288 с.
4. Atkinson R., Kendall A. An Introduction to Numerical Analysis. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1989. 342 p.
5. Гой Т. П., Копач М. І., Федак І. В. Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь. Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського націон. ун-ту ім. В. Стефаника, 2010. 148 с.
6. Коссак О., Тумаşова О. Методи наближених обчислень. Львів: Бак, 2003. 168 с.
7. Бейко І. В., Бублик Б. Н., Зінько П. Н. Методи і алгоритми розв'язування задач оптимізації. Київ: Вища школа, 1998. 512 с.
8. Нефьодов Ю. М., Балицька Т. Ю. Методи оптимізації в прикладах і задачах. Київ: Кондор. 2011. 324 с.
9. Брановицька С. В., Медведєв Р. Б., Фіалков Ю. Я. Обчислювальна математика та програмування. Київ: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2004. 220 с.
10. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю., Літинський В. В., Татарин О. В. Метод ранжирування за похибкою для оцінювання точності розв'язування задач моделювання динамічних систем. *Сучасні інформаційні та електронні технології: твори XXV Міжнародної науково-практичної конференції*, м. Одеса, 27-29 травня 2024 р. Одеса, 2024. С. 15-16. URL: <https://www.old.tkea.com.ua/siet/archive/2024/15.pdf>.
11. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Оцінювання розв'язків задач моделювання динамічних систем на основі методу ранжування за похибкою. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей 10-ї Міжнародної наукової конференції*. м. Кам'янець-Подільський, 28-29 червня 2024 р., Кам'янець-Подільський, 2024. С. 104-105. URL: <http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8145>.

12. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. Київ: Видавнича група BVH, 2006. 480 с.
13. Цегелик Г. Г. Чисельні методи. Львів: Видавничий центр Львівського націон. ун-ту, 2004. 408с.
14. Положаєнко С. А., Прокофьев А. Ю. Параметри методу Рунге-Кутти з різним порядком точності при інтегруванні рівнянь динаміки в задачах моделювання нестационарних систем. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2024. Т. 14, № 1-2. С. 85-96. DOI: 10.15276/imms.v14.no1-2.85. URL: http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2_v14_2024/immm_n1-2_v14_2024.pdf.

ENSURING THE DESIRED ORDER OF LOCAL ERROR IN THE IMPLEMENTATION OF DYNAMIC SYSTEMS MODELS BY THE METHOD WITH INCREASING ACCURACY

One of the main qualitative indicators of computing tools is the accuracy of the results of solving applied problems, in particular, problems of modelling and control of dynamic systems. However, despite the widespread use of computing tools (CT), the problem of assessing the accuracy of calculations cannot be considered solved, and its relevance is increasing due to the rapid development and spread of cybernetic tools for various purposes. The severity of the problem lies in the complexity of the analysis of calculation errors, which leads to the cumbersomeness of analytical justifications and a large amount of calculations required to obtain specific numerical data.

To solve many technical and scientific research problems, both universal and specialized OT tools are widely used. A characteristic difference of the latter from universal OT tools is a deliberately narrow class of algorithms that are implemented, focused on solving a limited range of applied problems. In this case, of course, it is expected to achieve a number of certain (compared to universal OT tools) advantages, which usually include one or a group of factors, such as increased speed, non-analytical method of solving problems (for analog specialized OT tools), reduced weight and dimensions and cost, etc. It should be noted that the problem of accuracy is relevant for both universal and specialized OT tools, somewhat transforming, depending on the type of tool and the principle of its operation, for example, the originality of the initial errors.

As a way to simplify the no less laborious process of analyzing the accuracy of the result following the problem-solving process (or to increase its efficiency), it is possible to present the transfer of at least part of this (last) process to the period preceding the solution of the main problem. This way consists in the preliminary calculation of the dependences of the error, and, practically, its characteristics, on the characteristics of the primary errors associated with the implementation, in particular, of mathematical models (MM) of dynamic systems in applied problems of their modelling and control.

Key words: *dynamical system, mathematical model, local error, method with increasing accuracy.*

Отримано: 14.06.2025