

УДК 517.95:519.63

DOI: 10.32626/2308-5916.2025-28.5-12

К. В. Васишин,

С. М. Ламтюгова, канд. фіз.-мат. наук

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ СТАЦІОНАРНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Задачу дослідження процесів теплопровідності в об'єктах, розміщених у нелінійних середовищах, зводять до розв'язання крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності, в якому коефіцієнти та/або функція потужності теплових джерел змінюються із температурою за певним законом. Серед чисельних підходів до розв'язання таких задач для нелінійних рівнянь математичної фізики можна виокремити метод скінченних різниць, скінченних елементів, варіаційні, проєкційні та різноманітні ітераційні методи. З останньої групи найбільш потужним можна вважати метод двобічних наближень, оскільки він дозволяє отримати зручну оцінку похибки наближеного розв'язку й обґрунтувати існування розв'язку задачі.

Метою роботи є дослідження застосовності методу двобічних наближень на основі використання функцій Гріна до розв'язання першої крайової задачі для нелінійного одновимірного рівняння теплопровідності зі степенево залежним від температури коефіцієнтом теплопровідності та експоненціально залежною від температури функцією потужності внутрішніх джерел тепла. Для досягнення поставленої мети була виконана заміна невідомої функції, а нова отримана крайова задача була зведена до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке було розглянуто як нелінійне операторне рівняння у напівупорядкованому банаховому просторі. Сформульовано умови існування єдиного додатного розв'язку задачі та умови двобічної збіжності до нього послідовних наближень. Розроблений метод програмно реалізовано та досліджено при розв'язанні тестової задачі. Результати обчислювального експерименту наведено у графічній та табличній формах.

Ключові слова: *нелінійна теплопровідність, нелінійна крайова задача, додатний розв'язок, функція Гріна, двобічний ітераційний метод, рівняння з ізотонним оператором, математичне моделювання.*

Вступ. При розв'язання важливих прикладних задач дослідження процесів та об'єктів у різноманітних важливих сферах життєдіяльності сучасного суспільства виникає необхідність використання оп-

тимальних методів математичного моделювання та обчислювального математичного апарату. За цих обставинах виникає потреба використання ефективних чисельних методів для розв'язання початкових, крайових та початково-крайових задач для квазілінійних диференціальних рівнянь з коефіцієнтом, нелінійно залежним від шуканої функції [1-4]. Сучасний математичний апарат пропонує великий вибір методів аналізу такого класу задач. Це, зокрема, методи теорії подібності, методи скінченних різниць, скінченних елементів, граничних інтегральних рівнянь [1, 5-8] або послідовних наближень з двобічним характером збіжності [9, 10, 17, 18]. Остання група методів дає змогу будувати дві послідовності функцій, які відповідно знизу та зверху апроксимують шуканий розв'язок задачі. Також ці методи надають можливість дослідникам мати апарат для доведення існування й єдиності розв'язку, дають зручну апостеріорну оцінку похибки наближень, а отже, і зручний критерій закінчення ітерацій, що робить їх дуже заманливими для використання порівняно з іншими методами розв'язання крайових задач для стаціонарних рівнянь.

Теоретичним підґрунтям методів двобічних наближень є теорія нелінійних операторів у напівпорядкованих банахових просторах [11-16].

Отже, актуальною є наукова задача вдосконалення та розширення сфери застосування двобічних ітераційних методів.

Постановка задачі. Розглядатимемо задачу знаходження додатного розв'язку нелінійної крайової задачі вигляду

$$-\frac{d}{dx}\left(u^\sigma \frac{du}{dx}\right) = \lambda e^{\gamma u}, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$u(0) = u(l) = 0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) є математичною моделлю процесу теплопровідності у випадку, коли коефіцієнт теплопровідності степеневно залежить від температури і коли на $(0, l)$ наявні джерела тепловиділення, що розподілені за експоненціальним законом $f(u) = \lambda e^{\gamma u}$ (параметр λ характеризує їх потужність). Всі параметри, що входять у постановку задачі (1), (2), вважатимемо додатними.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [18-20].

Метод розв'язання. У задачі (1), (2) зробимо заміну $u = (\sigma + 1)^{\frac{1}{\sigma+1}} \theta^{\frac{1}{\sigma+1}}$, де $\theta = \theta(x)$ – нова невідома функція. Тоді для функції v отримаємо крайову задачу

$$-\frac{d^2 \theta}{dx^2} = \lambda e^{\gamma(\sigma+1)^{\frac{1}{\sigma+1}} \theta^{\frac{1}{\sigma+1}}}, \quad 0 < x < l,$$

$$\theta(0) = \theta(l) = 0,$$

або, увівши позначення $\mu = \gamma(\sigma + 1)^\delta$, $\delta = \frac{1}{\sigma + 1}$, крайову задачу

$$-\frac{d^2\theta}{dx^2} = \lambda e^{\mu \cdot \theta^\delta}, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

$$\theta(0) = \theta(l) = 0. \quad (4)$$

Для розв'язання задачі (3), (4) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна [10, 17-20].

Задача (3), (4) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$\theta(x) = \lambda \int_0^l G(x, s) e^{\mu \theta^\delta(s)} ds, \quad (5)$$

де $G(x, s) = \frac{1}{l} \begin{cases} x(l-s), & 0 \leq x \leq s, \\ s(l-x), & s \leq x \leq l, \end{cases}$ – функція Гріна першої крайової

задачі для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ на відрізьку $[0, l]$.

Узагальненим розв'язком задачі (3), (4) назвемо функцію $\theta^* \in C[0, l]$, яка є розв'язком рівняння (5). Тоді розв'язком (узагальненим) вихідної задачі (1), (2) вважатимемо функцію

$$u^* = (\sigma + 1)^{\frac{1}{\sigma+1}} (\theta^*)^{\frac{1}{\sigma+1}}.$$

Оператор T , що визначається правою частиною інтегрального рівняння (5), діє у просторі $C[0, l]$ за правилом

$$\lambda \int_0^l G(x, s) e^{\mu v^\delta(s)} ds$$

і є цілком неперервним ізотонним оператором.

У конусі $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій з $C[0, l]$ виділимо інваріантний для оператора T конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ умовами

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^l G(x, s) e^{\mu [v_0(s)]^\delta} ds &\geq v_0(x) \quad \text{для всіх } x \in [0, l], \\ \lambda \int_0^l G(x, s) e^{\mu [w_0(s)]^\delta} ds &\leq w_0(x) \quad \text{для всіх } x \in [0, l]. \end{aligned}$$

Інваріантність конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ означає, що

$$T(\langle v_0, w_0 \rangle) \subset \langle v_0, w_0 \rangle.$$

Позначимо $F(\theta) = \lambda e^{\mu\theta^\beta}$. Оскільки $F(0) > 0$, то зазначений інваріантний конусний відрізок можна шукати у вигляді $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$. Тоді нерівності, що його визначають, набувають вигляду

$$\lambda \int_0^l G(x, s) ds \geq 0 \quad \text{для всіх } x \in [0, l],$$

$$\lambda e^{\mu\beta^\beta} \int_0^l G(x, s) ds \leq \beta \quad \text{для всіх } x \in [0, l].$$

Перша з цих нерівностей виконується завжди, а другу нерівність можна записати у вигляді

$$M \lambda e^{\mu\beta^\beta} \leq \beta, \quad (6)$$

$$\text{де } M = \max_{x \in [0, l]} \int_0^l G(x, s) ds = \frac{l^2}{8}.$$

Оскільки величина $\max_{x \in [0, l]} (w^0(x) - v^0(x)) = \beta$ має бути якомога меншою для більш швидкої збіжності ітерацій, то при практичній реалізації ітераційного процесу слід взяти найменше β , що задовольняє нерівність (6), тобто взяти найменший корінь рівняння

$$M \lambda e^{\mu\beta^\beta} = \beta.$$

Сформуємо далі ітераційний процес за схемою:

$$v^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^l G(x, s) e^{\mu[v^{(k)}(s)]^\beta} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^l G(x, s) e^{\mu[w^{(k)}(s)]^\beta} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$v^{(0)}(x) = 0, \quad w^{(0)}(x) = \beta. \quad (9)$$

Збіжність послідовних наближень, що формуються за схемою (7)-(9), до єдиної на інваріантному конусному відрізку $\langle 0, \beta \rangle$ нерухомої точки оператора T гарантує виконання умов, наведених у [10].

Отже, матиме місце така теорема.

Теорема. Нехай на інваріантному конусному відрізку $\langle 0, \beta \rangle$ існує єдина нерухома точка ізотонного оператора T . Тоді ітераційний процес (7)-(9) збігається у нормі простору $C[0, l]$ до єдиного на $\langle 0, \beta \rangle$ неперервного додатного розв'язку θ^* крайової задачі (3), (4), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned}
 0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq \\
 \leq \theta^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = \beta.
 \end{aligned}
 \quad (10)$$

Нерівності (10) як раз і характеризують ітераційний процес (7)-(9) як метод двобічних наближень. Перевагою цього методу є те, що на кожній k -й ітерації відомою є верхня та нижня оцінки шуканого розв'язку і для наближення $\theta^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x))$ матимемо зручну апостеріорну оцінку похибки:

$$\|\theta^* - \theta^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \|w^{(k)} - v^{(k)}\| = \frac{1}{2} \max_{x \in [0, l]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)).$$

Тоді, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітерації слід проводити до виконання нерівності $\max_{x \in [0, l]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon$ і з точністю ε можна вважати, що $\theta^*(x) \approx \theta^{(k)}(x)$, а отже, $u^*(x) \approx (\sigma + 1)^{\frac{1}{\sigma+1}} (\theta^{(k)})^{\frac{1}{\sigma+1}}$.

Обчислювальний експеримент. Проведемо обчислювальний експеримент для задачі (3), (4), у якій покладемо $l=1$, $\lambda=2$, $\sigma=1$ і $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Умови збіжності метода двобічних наближень перевіряються безпосередньо. Отримано, що $\beta = 0,5515$. Запустимо ітераційний процес вигляду (7) – (9) і задамо точність $\varepsilon = 10^{-6}$.

Ітераційний процес зійшовся із заданою точністю до розв'язку вихідної задачі за 11 ітерацій. Результати ітерацій наведено на рис. 1 і у табл. 1 та 2.

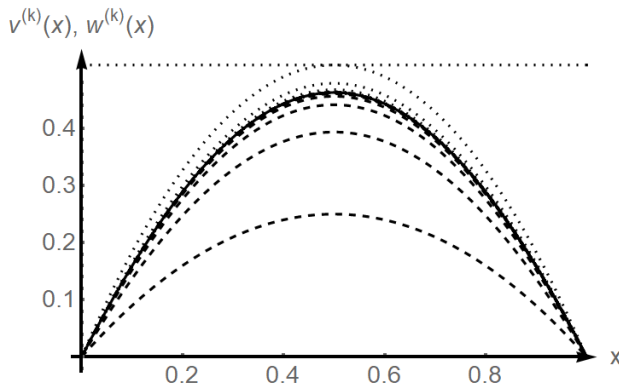


Рис. 1. Графіки $v^{(k)}(x)$ і $w^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 11$

Таблиця 1

Значення наближеного розв'язку $\theta^{(11)}(x)$

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\theta^{(11)}(x)$	0,000000	0,159277	0,288994	0,384593	0,443109	0,462806
x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$\theta^{(11)}(x)$	0,443109	0,384593	0,288994	0,159277	0,000000	

Таблиця 2

Значення наближеного розв'язку $u^{(11)}(x)$

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$u^{(11)}(x)$	0,000000	0,564406	0,760255	0,877033	0,941392	0,962088
x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$u^{(11)}(x)$	0,941392	0,877033	0,760255	0,564406	0,000000	

Висновки. У роботі вперше запропоновано чисельний метод отримання додатного розв'язку першої крайової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності з експоненціально нелінійним коефіцієнтом теплопровідності та джерелом тепла, розподіленим за степеневим законом, за допомогою методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Ці результати будуть корисними в дослідженнях у критично важливих галузях розвитку нашої держави, таких як медицина, фізика, біологія, будівництво тощо.

Список використаних джерел:

1. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum Press, 1992.
2. Samarskii A. A., Mikhailov A. P. Principles of Mathematical Modelling: Ideas, Methods, Examples. London: CRC Press, 2001.
3. Frank-Kamenetskii D. A. Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics. Princeton: Princeton University Press, 1955.
4. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1995.
5. Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes. New York: CRC Press, 2001.
6. Kudryashov N. A., Khlunov A. V., Chmykhov M. A. Thermal regimes of high burn-up nuclear fuel rod. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. Vol. 15. № 5. P. 1240-1252.
7. Chen G., Zhou J., Ni W.-M. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2000. Vol. 10, № 7. P. 1565-1612.
8. Kumar M., Mishra G. An introduction to numerical methods for the solutions of partial differential equations. *Applied Mathematics*. 2011. Vol. 2, № 11. P. 1327-1338.

9. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Vol. 10, № 2. P. 360-375.
10. Sidorov M. V. Method of two-sided approximations of the solution of the first boundary value problem for nonlinear ordinary differential equations based on the Green's function use. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2019. № 1 (48). P. 57-66.
11. Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional Analysis. New York: Pergamon, 1982.
12. Krasnosel'skii M. A. Positive Solutions of Operator Equations. Groningen: Noordhoff, 1964.
13. Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. *SIAM Review*. 1976. Vol. 18, № 4. P. 620-709.
14. Opojtsev V. I. A generalization of the theory of monotone and concave operators. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*. 1979. Vol. 36. P. 243-279.
15. Shuvar B. A., Kopach M. I. Two-sided operator inequalities with nonmonotone operators. *Differential Equations*. 2006. Vol. 42. P. 586-590.
16. Kolosov A. I. A boundary value problem on a nonfixed interval. *Siberian Mathematical Journal*. 1976. Vol. 17, № 6. P. 944-948.
17. Ламтюгова С. М., Поляков А. О., Сидоров М. В. Конструктивне дослідження методами двосторонніх наближень крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь другого порядку. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2023. № 1. С. 142-148.
18. Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V. Two-sided approximations method based on the Green's functions use for construction of a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2021. № 3 (58). P. 26-41.
19. Gybkina N., Sidorov M., Vasylyshyn K. Application of two-sided approximations method to solution of first boundary value problem for one-dimensional nonlinear heat conductivity equation. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2021. № 4. С. 115-127.
20. Василюшин К. В. Застосування методу двобічних наближень до розв'язання першої крайової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності з експоненціально нелінійним коефіцієнтом теплопровідності. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки. 2024. Вип. 25. С. 19-26.

NUMERICAL ANALYSIS BASED ON THE METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS FOR SOLVING SOME PROBLEMS OF STATIONARY NONLINEAR HEAT CONDUCTIVITY

The task of studying the processes of heat conduction in objects located in nonlinear environments is reduced to solving boundary value problems for a nonlinear heat conduction equation, in which the coefficients and/or the power function of heat sources vary with temperature according to certain rules. Among the numerical approaches applicable to solving such problems

for nonlinear equations of mathematical physics, one can distinguish the finite difference method, finite element method, variational, projection and manifold iterative methods. Given those options, we can consider the method of two-sided approximations as the most useful since it allows the researcher to obtain a convenient estimate for the error of the approximate solution and justify the existence of a solution to the original problem.

The aim of the article is to study the applicability of the method of two-sided approximations based on usage of Green's functions to solve the first boundary value problem for a nonlinear one-dimensional heat conduction equation with a power-dependent temperature coefficient of heat conduction and an exponentially temperature-dependent power function of internal heat sources. To achieve the set goal, the original problem was replaced, and the new obtained boundary value problem was reduced to the equivalent Hammerstein integral equation, which was considered as a nonlinear operator equation in a semi-ordered Banach space. The conditions for the existence of a unique positive solution to the problem and the conditions for two-sided convergence of approximations to it were formulated. The developed method was implemented programmatically and investigated when solving a test problem. The results of the computational experiment are given via graphical and tabular information.

Key words: *nonlinear heat conduction, nonlinear boundary value problem, positive solution, Green's function, two-sided iterative method, equation with isotone operator, mathematical modeling.*

Отримано: 14.12.2025