8. Бомба А. Я. Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Обчислювальна та прикладна математика. 2010. — №2. — С. 3–13.
9. Бомба А. Я. Один підхід до ідентифікації фільтраційно-ємкісних параметрів нафтогазових пластів / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярощак // Математичне моделювання. — 2013. — № 1 (28). — С. 31–35.

An integrated approach to mathematical modeling of two-phase flow processes in horizontal oil and gas reservoirs generalized to the case of more complex motion of a heterogeneous system consisting of water, oil and gas phases.

Key words: *three-phase filtration, quasiconformal mappings, numerical method.*

Отримано: 14.03.2014

УДК 539.3

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, профессор,
Б. А. Худаяров**, д-р техн. наук, профессор

*Институт проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины, г. Киев,
**Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г. Ташкент, Узбекистан

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН В ПОТОКЕ ГАЗА

В статье рассматривается флаттер вязкоупругих пластин. Основное направление работы состояло в учете вязкоупругих свойств материала при сверхзвуковых скоростях. Уравнения колебаний относительно прогибов описываются интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных. Аэродинамическое давление определяется в соответствии с поршневой теорией А. А. Ильюшина. При помощи метода Бубнова-Галеркина задачи сведены к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Решение ИДУ находится численным методом, основанным на использовании квадратурных формул. Разработаны вычислительные алгоритмы и создан комплекс прикладных программ для решения широкого класса задач о нелинейном флаттере вязкоупругих пластин. Определена критическая скорость флаттера вязкоупругих пластин.

Ключевые слова: *математическое моделирование, численные методы и алгортмы, интегро-дифференциальные уравнения, флаттер пластин, вязкоупругость.*

Введение. В настоящее время композиционные материалы, обладающие ярко выраженными вязкоупругими свойствами, широко применяются в авиационной промышленности и многих других отраслях машиностроения. Эти отрасли получили легкие, изящные и экономичные тонкостенные конструкции, для которых роль расчетов на устойчивость и в общем цикле прочностных расчетов резко возросла. В связи с этим наследственная теория вязкоупругости привлекает к себе все большее внимание исследователей. Об этом свидетельствует выход в свет за последние годы ряда научных работ, в которых отражены последние достижения теории вязкоупругости. Возрастающий интерес к этой теории объясняется развитием вычислительной техники, позволяющей достоверно сравнить вычислительный эксперимент, полученный на основе математических моделей, с натурным экспериментом.

Основой исследования процессов деформирования композиционных материалов является наследственная теория вязкоупругости, конкретное применение которой зависит от параметров материалов, формы изделия и диапазона изменения условий внешней среды. При этом существенные трудности получения «хороших» моделей возникают в связи с учетом свойств вязкоупругости и нелинейных эффектов. Следует отметить, что использование традиционных материалов в самолетостроении позволило применять математические модели, которые уже сейчас можно называть упрощенными не учитывающими в полной мере свойств вязкоупругости и других эффектов. Данные эффекты наиболее значительно проявляются в условиях сверхзвуковых потоков воздуха или жидкости, т.е. при высоких скоростях, которые приводят к возникновению эффекта флаттера.

Таким образом, полученные ранее научные результаты в области моделирования процессов поведения элементов летательных аппаратов в условиях высоких скоростей не могут быть непосредственно применены в рассматриваемых задачах, что свидетельствует об актуальности проблемы получения адекватных математических моделей динамики элементов летательных аппаратов, построенных из материалов с явно выраженными существенно вязкоупругими и нелинейными свойствами и функционирующих в режимах флаттера.

Отмеченные свойства материалов конструкций и вышеуказанные факторы увеличивают сложность исследований и приводят к необходимости разработки вычислительных методов изучения устойчивости вязкоупругих элементов тонкостенных конструкций. Поэтому разработка эффективных вычислительных алгоритмов решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений динамических задач вязкоупругих элементов тонкостенных конструкций со слабосингулярными ядрами наследственности является актуальной.

Флаттер пластин и пологих оболочек с учетом упругого основания был рассмотрен рядом авторов [1; 2]. В [1] рассматривалась бесконечная пластина, лежащая на упругом основании и обтекаемую потоком газа. Несмотря на значительное количество работ, проведено сравнительно мало исследований по нелинейному флаттеру вязкоупругих пластин и панелей на упругом основании.

В связи с этим в данной работе дается теоретическое исследование нелинейного флаттера вязкоупругих пластин. На основе метода Бубнова-Галеркина с использованием квадратурных формул и способа исключения слабо-сингулярных операторов разработан эффективный вычислительный алгоритм, позволяющий исследовать задачи о нелинейном флаттере вязкоупругих пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа.

Основная часть. Рассмотрим нелинейную задачу о флаттере пластины с учетом вязкоупругого основания. Пусть пластина со сторонами a и b и толщиной h шарнирно оперта по всему контуру, обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа. При предположении, принятом в [1; 3–5], уравнение колебаний вязкоупругой пластины с учетом оснований имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{D}{h}\left(1-R^*\right)\nabla^4 w = L\left(w,\Phi\right) - k(1-\Gamma^*)w - \\ -\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{B}{h}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{BV}{h}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{B_1V^2}{h}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \\ \frac{1}{E}\nabla^4\Phi = -\left(1-R^*\right)\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]^2\right\},\end{gathered} \tag{1}$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость; ρ — плотность материала; h — толщина пластинки; E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона; w — прогиб пластинки; $\nabla^4 = \left(\nabla^2\right)^2$, ∇^2 — оператор Лапласа; V — скорость потока; R^*-интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$, имеющим слабосингулярную особенность типа Абеля:

$$R^*\varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau ,$$

$$\left(R\left(t\right) = A\cdot\exp\left(-\beta t\right)\cdot t^{\alpha-1},\ \ A>0,\ \beta>0,\ 0<\alpha<1\right);$$

L — дифференциальный оператор:

$$L\left(w,\Phi\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y};$$

Φ — функция напряжений; κ — коэффициент постели; Γ^* — интегральный оператор с ядром релаксации $\Gamma(t)$

$$\left(\Gamma^* \varphi(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau,\ \Gamma(t) = A_0 t^{\alpha_0 - 1} \exp(-\beta_0 t) \right);$$

$B = \dfrac{\aleph p_\infty}{V_\infty}$, $B_1 = \dfrac{\aleph(\aleph+1)p_\infty}{4V_\infty^2}$, $\aleph$ — показатель политропы газа; p_∞, V_∞ — соответственно давление и скорость звука в невозмущенном потоке газа.

Решения системы (1) ищем в виде

$$w\ (x,y,t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{L} w_{nm}(t) \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}, \tag{2}$$

$$\Phi(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{L} \Phi_{nm}(t) \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}.$$

После выполнения процедуры Бубнова-Галеркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) относительно $w_{nm}(t)$ и $\Phi_{nm}(t)$ и исключая из этой системы $\Phi_{nm}(t)$, запишем следующее нелинейное ИДУ относительно искомой функции $w_{nm}(t)$:

$$\begin{gathered} \ddot{w}_{kl} + \lambda^4 \Omega^2 \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 (1-R^*) w_{kl} + \frac{16}{\pi^2} g_k g_l k (1-\Gamma^*) w_{kl} + \\ + \frac{12\lambda^4 \left(1-\mu^2\right)\Omega^2}{\pi^2} \sum_{n,i,j=1}^{N} \sum_{m,r,s=1}^{L} a_{k\ln mirjs} w_{nm} \left(1-R^*\right) w_{ir} w_{js} + M \dot{w}_{kl} + \\ +2MM^* \sum_{n=1}^{N} \gamma_{kl} w_{nl} + M_1 M^{*2} \sum_{n,i}^{N} \sum_{m,r}^{L} F_{k\ln mir} w_{nm} w_{ir} = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$w_{kl}(0) = w_{0kl},\ \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl},\ k = \overline{1,N};\ l = \overline{1,L},$$

где $\Omega^2 = \dfrac{\pi^4}{12\left(1-\mu^2\right)} M_E^2 \left(\dfrac{h}{a}\right)^2$, $M = \aleph M_p^2 \lambda_1$, $M_1 = \aleph(\aleph+1)\dfrac{M_p^2}{4}$;

$M^* = \dfrac{V}{V_\infty}$ — число Маха; $M_E = \sqrt{\dfrac{E}{\rho V_\infty^2}}$; $M_p = \sqrt{\dfrac{P_\infty}{\rho V_\infty^2}}$; $\lambda = \dfrac{a}{b}$;

$\lambda_1 = \dfrac{a}{h}$; g_k, γ_{kl}, $F_{k\ln mir}$, $a_{k\ln mir}$ — безразмерные коэффициенты [5].

Системы нелинейных ИДУ (3) решаются численно с помощью метода, предложенного в [6; 7; 10].

Результаты вычислений представлены в таблице при $N = 5$, $L = 1$. В качестве критерия, определяющего критическую скорость $V_{кр}$, принимаем условие, что при этой скорости происходит колебательное движение с быстро возрастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению. В случае $V < V_{кр}$ скорость потока меньше критической, амплитуда колебаний вязкоупругой пластинки затухает [6–10].

Исследовалось влияние вязкоупругих свойств материала пластинки на критические значения скорости флаттера. Результаты вычислений, представленные в табл. 1, показывают, что решения упругих ($A = 0$) и вязкоупругих ($A > 0$) задач существенно различаются между собой. Например, при увеличении параметра A от нуля до значения 0,1 критическая скорость флаттера уменьшается на 27,7%.

Далее исследовано влияние параметра сингулярности α на критическую скорость флаттера. С увеличением α эта скорость возрастает. Например, разница между значениями критической скорости при $\alpha = 0{,}1$ и $\alpha = 0{,}4$ составляет 53%.

Из приведенной таблицы видно, что влияние параметра затухания β, ядра наследственности на скорость флаттера пластинки по сравнению с влиянием параметра вязкости A и сингулярности α незначительно, что еще раз подтверждает, что экспоненциальное ядро релаксации не способно полностью описать наследственные свойства материала конструкций.

Изучено влияние параметра относительной толшины пластинки λ_1 на критическую скорость $V_{кр}$ флаттера. Расчеты были проведены при $\lambda_1 = 220$, 280, 300 и 350. Полученные результаты показывают, что с уменьшением толщины пластинки (ростом параметра λ_1) критическая скорость флаттера вязкоупругой пластинки уменьшается.

Таблица 1

Зависимость критической скорости флаттера пластины с вязкоупругим основанием от физико-механических и геометрических параметров

A	α	β	A_o	α_o	β_o	λ	λ_1	k	V_{kp}
0 0,001 0,01 0,1	0,25	0,05	0,02	0,3	0,01	2,5	250	0,0001	1620 1595 1492 1170
0,1	0,1 0,4 0,7	0,05	0,02	0,3	0,01	2,5	250	0,0001	865 1325 1479
0,1	0,25	0,01 0,1	0,02	0,3	0,01	2,5	250	0,0001	1186 1167
0,1	0,25	0,05	0 0,05 0,3	0,3	0,01	2,5	250	0,0001	1219 1158 1137
0,1	0,25	0,05	0,02	0,1 0,5 0,9	0,01	2,5	250	0,0001	1162 1211 1230

Продолжение таблицы 1

0,1	0,25	0,05	0,02	0,3	0,1 0,5	2,5	250	0,0001	1165 1162
0,1	0,25	0,05	0,02	0,3	0,01	2 2,2 2,7	250	0,0001	718 887 1467
0,1	0,25	0,05	0,02	0,3	0,01	2,5	220 280 300 350	0,0001	1740 846 674 412
0,1	0,25	0,05	0,02	0,3	0,01	2,5	250	0 0,0002 0,0004 0,0006	1047 1244 1322 1439

Исследовалось влияние параметра удлинения пластинки λ на величину критической скорости флаттера. С увеличением λ происходит повышение критической скорости. Это объясняется тем, что с ростом λ (при постоянном λ_1) уменьшается размер пластинки перпендикулярно направлению течения и, следовательно, повышается относительная жесткость системы.

Из таблицы следует, что с учетом вязкоупругого основания критическая скорость флаттера возрастает, относительно без учета вязкоупругих оснований. Особенно для больших коэффициентов постели скорость флаттера заметно увеличивается.

Выводы. Таким образом, можно сделать вывод о том, что параметр сингулярности α влияет не только на колебания вязкоупругих систем, но и на критическую скорость флаттера. Следовательно, учет этого влияния при проектировании авиационных конструкций имеет важное значение, так как чем меньше параметр сингулярности материала конструкции, тем интенсивнее протекают диссипативные процессы в этих конструкциях.

На основании полученных результатов можно заключить, что учет вязкоупругих свойств материала пластинки приводит к уменьшению критической скорости флаттера V_{kp}, с которой начинается явление флаттера.

Отметим также, что при скорости потока меньшей, чем V_{kp}, влияние вязкоупругого свойства материала уменьшает амплитуду и частоту колебаний. Если же скорость потока превышает V_{kp}, то вязкоупругое свойство материала оказывает уже дестабилизирующее влияние.

Список использованной литературы:

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. — М. : Физматгиз, 1961. — 340 с.

2. Иванов В. А. Устойчивость пологих оболочек на упругом основании в сверхзвуковом потоке газа / В. А. Иванов // Сб. Динамика оболочек в потоке. Труды семинара. — Казань, 1985. — Вып. 18. — С. 161–165.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. — М. : Наука, 1972. — 432 с.
4. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей / А. А. Ильюшин // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. XX. — Вып. 6. — С. 733–755.
5. Khudayarov B. A. Numerical Analysis of the Nonlinear Flutter of Viscoelastic Plates / B. A. Khudayarov // INTERNATIONAL J. APPLIED MECHANICS. — 2005. — Vol. 41, № 5. — P. 538–542.
6. Бадалов Ф. Б. О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости / Ф. Б. Бадалов, Х. Эшматов, М. Юсупов // Прикладная математика и механика. — 1987. — Т. 51, № 5. — С. 867–871.
7. Худаяров Б. Об одном численном методе решения интегральных уравнений задачи нелинейного флаттера вязкоупругих систем / Б. Худаяров // Интегральные уравнения — 2009 : сборник тезисов докладов конф., 26–29 января 2009. — К., 2009. — С. 147–149.
8. Худаяров Б. А. Нелинейный флаттер вязкоупругих отротропных цилиндрических панелей / Б. А. Худаяров, Н. Г. Бандурин // Ж. Математическое моделирование. РАН. — 2005. — Т. 17, №10. — С. 79–86.
9. Худаяров Б. А. Численное решение нелинейных задач о флаттере вязкоупругих оболочек / Б. А. Худаяров // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2004. — Т. 7, № 3. — С. 277–282.
10. Бадалов Ф. Б. Исследование влияния вязкоупругого свойства материала конструкций летательного аппарата на критическое время и критическую скорость флаттера / Ф. Б. Бадалов, Б. А. Худаяров // Известия НАН Армении. Серия «Механика». — 2008. — Т. 61, № 1. — С. 75–82.

The flutter of viscoelastic plates streamlined by a gas current are investigated. The basic direction of the present work consists in taking into account of visco-elastic material properties at supersonic speeds. The vibration equations relative to deflections are described by integro partial differential equations. Aerodynamic pressure is defined by A. A. Ilyushin piston theory. By the Bubnov-Galerkin methods, the problems are reduced to investigation of a system of ordinary integro-differential equations (IDE). The IDEs are solved by a numerical method which is based on using the quadrature formulas. Computing algorithms are developed and the complex of applied programs for the decision of a wide class of problems about nonlinear flutter of viscoelastic elements and units of the decision of a wide class of problems about nonlinear flutter of viscoelastic plates. The results of the flutter critical speed calculations have been given.

Key words: *mathematical modelling, numerical methods and algorithms, integro-differential equations, plate flutter, viscoelastic.*

Отримано: 03.03.2014