УДК 004.942

Н. Л. Костьян, старший преподаватель

Киевский национальный университет технологий и дизайна, г. Киев

ОСНОВНЫЕ ФОРМЫ И ОСОБЕННОСТИ ЯВНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Работа посвящена вопросам получения линейных и нелинейных непараметрических моделей объектов в явном виде. Представлены динамические характеристики для комбинированных моделей различной структуры.

Ключевые слова: *динамическая модель, импульсная переходная функция, переходная характеристика, частотная характеристика, передаточная функция, преобразование Лапласа.*

Введение. Для большинства задач анализа динамических систем главным методом исследования и получения результатов являются математические модели. Наряду с дифференциальными (параметрическими) моделями задач динамики все более широкое применение находят непараметрические модели, которые являются самостоятельным видом математического описания задач динамики и формируются на основе заданных динамических характеристик объекта или его элементов. Динамические характеристики представляют собой функциональные зависимости, которые могут быть получены в виде экспериментальных данных или в аналитическом виде. Применение непараметрических динамических моделей позволяет расширить круг эффективно решаемых исследовательских и проектных задач.

Целью данной работы является рассмотрение форм и анализ свойств непараметрических моделей и формализация схем приложений динамических характеристик при получении явных моделей объектов разной структуры.

Явные линейные модели. Явной динамической моделью объекта называется оператор $A(t)$, устанавливающий зависимость выходных величин $Y^0(y_1, y_2, ..., y_n)$ от входных $X(x_1, x_2, ..., x_m)$ в любой момент времени t:

$$Y^0(t) = A(t)[X], \qquad (1)$$

где $Y^0(t)$ и $X(t)$ заданы на некотором отрезке времени $[T_1, T_2]$, причем на значение $Y^0(t)$ в момент времени t_0 влияет $X(t)$ при $-\infty \le T_1 \le t_0 \le T_2 \le \infty$. Зависимость (1) называется уравнением дина-

© Н. Л. Костьян, 2014

мики объекта. Оператор $A(t)$ может быть задан в явном виде при помощи зависимости

$$Y(t) = \Psi(X, t), \tag{2}$$

где $Y(t)$ — выход модели объекта, Ψ — заданный оператор, либо при помощи решения системы дифференциальных уравнений или уравнений иного типа. Часто бывает удобным динамические свойства объектов управления описывать в виде

$$Y^0(t) = W[X],$$

где W — матрица, элементы которой $W_{ij}, i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ — динамические характеристики связи между i-й входной и j-й выходной величинами.

Уравнение динамики в случае произвольной линейной модели объекта имеет вид

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \tag{3}$$

где $k(t, \tau)$ — импульсная переходная функция (ИПФ), которая и представляет собой динамическую характеристику. Из (3) вытекает, что импульсная переходная функция является реакцией линейной модели объекта на возмущение в виде δ-функции Дирака в момент $t = \tau$ (при нулевых начальных условиях).

Объект, для которого $k(t, \tau) \neq 0$ при некоторых сколь угодно больших $t - \tau$, называется объектом с бесконечной памятью. Для таких объектов справедливо соотношение (3). Примером объектов, для которых влияние предыдущих входных сигналов уменьшается, но не исчезает, являются: $k(t, \tau) = e^{-\alpha(t-\tau)}$, $k(t, \tau) = e^{\alpha(t-\tau)} \cos \omega\tau$, $\alpha > 0$ и др. Объектом с конечной памятью называется такой объект, ИПФ которого обращается в нуль через конечный промежуток времени Т после подачи сигнала в виде δ-функции в момент τ, т. е. $k(t, \tau) = 0$ при $t - \tau > T$.

В этом случае

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} k(t, \tau) x(\tau) d\tau. \tag{4}$$

Для объектов с постоянными параметрами (стационарных) вид реакции зависит только от времени с момента подачи возмущающего сигнала, т. е. от разности $t - \tau$. Поэтому для стационарных объектов $k(t, \tau) = k(t - \tau)$ и соотношение (3) примет вид

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)k(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty} k(u)x(t-u)du\ ,\ u=t-\tau. \qquad (5)$$

Для линейных моделей объектов с *m* входами и *n* выходами система уравнений динамики имеет вид

$$y_j(t)=\sum_{s=1}^{m}\int_{-\infty}^{t} k_{js}(t,\tau)x_s(\tau)d\tau\ ,\ j=\overline{1,n}\ , \qquad (6)$$

где $k_{js}(t,\tau)$ — ИПФ по js-му каналу, которая определяется как реакция на j-м выходе на возмущение $x_s(u)=\delta(u-\tau)$ при $x_p\equiv 0$ (для всех $p\neq s$). Если внутренняя структура объекта со временем не изменяется, то (6) примет вид

$$y_j(t)=\sum_{s=1}^{m}\int_{-\infty}^{t} k_{js}(t-\tau)x_s(\tau)d\tau=\sum_{s=1}^{m}\int_{0}^{\infty} x_s(t-u)k_{js}(u)du, \qquad (7)$$
$$u=t-\tau,\ j=\overline{1,n}.$$

Таким образом, ИПФ многомерного объекта задается матрицей K, элементы которой k_{js} являются ИПФ по js-му каналу.

В случае, когда модель объекта представляет собой l последовательно соединенных линейных моделей объектов с ИПФ $k_i(t,\tau)$, $i=\overline{1,l}$, ИПФ $k(t,\tau)$ объекта в целом, согласно (5), будет иметь вид

$$k(t,\tau)=\int_{-\infty}^{t} du_1 k_l(t,u_1)\int_{-\infty}^{u_1} du_2 k_{l-t}(u_1,u_2)...$$
$$...\int_{-\infty}^{u_{l-2}} du_{l-1}k_2(u_{l-2},u_{l-1})k_1(u_{l-1},\tau). \qquad (8)$$

Для l параллельно соединенных линейных моделей объектов с ИПФ $k_i(t,\tau)$, $i=\overline{1,l}$, ИПФ $k(t,\tau)$, очевидно, имеет вид

$$k(t,\tau)=\sum_{i=1}^{t} k_i(t-\tau)\ .$$

Заметим, что ИПФ, определяемая соотношением (8), зависит от порядка соединения линейных моделей объектов.

Для полного описания линейной модели объекта достаточно знать его реакцию на какой-нибудь один тип элементарных возмущающих сигналов. Подадим на вход модели объекта единичную ступенчатую функцию

$$x(t,\tau)=\begin{cases}0,\ t<\tau,\\1,\ t\geq\tau.\end{cases} \qquad (9)$$

Тогда на выходе модели объекта, в соответствии с (3) получим

$$y(t) = h(t,\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ \int\limits_{\tau}^{t} k(t,u)\,du, & t \ge \tau. \end{cases} \tag{10}$$

Функция $h(t,\tau)$, которая описывает переходный процесс при нулевых начальных условиях и при возмущающем сигнале в виде (9), называется переходной характеристикой или единичной переходной функцией. О качестве модели объекта судят по виду переходного процесса, который описывает переходная характеристика. Из (10) следует, что

$$k(t,\tau) = -\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial \tau}.$$

Разгонная характеристика стационарной линейной модели объекта $h(t,\tau)$ будет зависеть от $t-\tau=\zeta$:

$$h(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta < 0, \\ \int\limits_{0}^{\zeta} k(u)\,du, & \zeta \ge 0, \end{cases}$$

и связь $h(\zeta)$ с ИПФ будет иметь вид

$$h(\zeta) = \int\limits_{0}^{\zeta} k(u)\,du, \;\; k(\zeta) = \frac{\partial h}{\partial \zeta}.$$

Частотная характеристика $\Phi(i\omega)$ и ИПФ связаны между собой при помощи прямого и обратного преобразований Фурье

$$\Phi(i\omega) = \int\limits_{0}^{\infty} k(u) e^{-i\omega u}\,du, \; k(u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega) e^{i\omega u}\,du.$$

В случае невыполнимости условия абсолютной интегрируемости вводят в рассмотрение преобразование Лапласа, которое применимо для функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$f(t) = 0, \;\; t < 0, \tag{11}$$

не только, когда $f(t)$ абсолютно интегрируема, но и тогда, когда можно выбрать такое положительное число с, что

$$\int\limits_{0}^{\infty} |f(t)| e^{-ct}\,dt < \infty. \tag{12}$$

При выполнении (11) и (12) преобразование Лапласа

$$F(p) = \int\limits_{0}^{\infty} f(t) e^{-pt}\,dt, \;\; \operatorname{Re} p \ge c.$$

Передаточная функция $\Phi(p)$ и ИПФ связаны при помощи прямого и обратного преобразования Лапласа

$$\Phi(p)=\int_{0}^{\infty}k(u)e^{-pu}du,$$

$$k(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Phi(p)e^{pu}dp,\ u\geq 0.$$

Передаточная функция для линейных моделей объектов с переменными параметрами связана с ИПФ соотношением [1]

$$\Phi(p,t)=\int_{-\infty}^{t}k(t,\tau)e^{-p(t-\tau)}d\tau\ .$$

Подадим на вход линейного стационарного объекта сигнал $x(t)=a\sin\omega t$. Тогда на основании соотношения (5)

$$y(t)=a\left|\Phi(i\omega)\right|\sin(\omega t+\alpha), \qquad (13)$$

где $\alpha=arctg\dfrac{B(\omega)}{A(\omega)}$, $A(\omega)$ и $B(\omega)$ — соответственно действительная и мнимая части $\Phi(i\omega)$. Из (13) следует, что вынужденные колебания, вызываемые в линейной модели объекта гармоническим воздействием, представляют собой также гармоническую функцию времени, имеющую ту же частоту ω, что и воздействие, но отличающуюся от последнего по амплитуде и по фазе, причем $\left|\Phi(i\omega)\right|$ указывает, во сколько раз изменилась выходная амплитуда относительно a, а α — сдвиг по фазе для выходного сигнала. Величины $\left|\Phi(i\omega)\right|$ и α зависят от частоты ω. Существует определенная частота $\omega=\omega_0$ такая, что объект не пропускает сигналы с частотой $\omega>\omega_0$. Частота ω_0 называется частотой среза.

Аналогично можно показать, что по $\Phi(p)$ для линейного стационарного объекта можно определить, каким образом преобразуется сигнал типа e^{pt}, поданный на вход объекта.

Применяя к $Y(i\omega)$ и $Y(p)$ соответственно обратные преобразования Фурье или Лапласа, получим

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(i\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(i\omega)\Phi(i\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad (14)$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}X(p)\Phi(p)e^{itp}dp\ . \qquad (15)$$

Из соотношений (14) и (15) следует, что если известна $\Phi(i\omega)$ или $\Phi(p)$, то мы можем вычислить не только вынужденные колебания на выходе объекта, но и переходный процесс, который возникает в нем при любом воздействии $x(t)$ на его входе. Поэтому передаточные функции могут рассматриваться как полноценные линейные модели объекта.

Передаточная функция $\Phi(p)$ объекта, состоящего из l последовательно соединенных линейных моделей объектов с передаточными функциями $\Phi_k(p)$, $k=\overline{1,l}$, равна их произведению: $\Phi(p)=\prod_{k=1}^{l}\Phi_k(p)$. Передаточная функция $\Phi(p)$ объекта, состоящего из l параллельно соединенных линейных объектов с передаточными функциями $\Phi_k(p)$, $k=\overline{1,l}$, равна их сумме: $\Phi(p)=\sum_{k=1}^{l}\Phi_k(p)$. Передаточная функция $\Phi(p)$ объекта, состоящего из линейной модели объекта с передаточной функцией $\Phi_1(p)$, охваченной обратной связью с передаточной функцией $\Phi_2(p)$, имеет вид $\Phi(p)=\dfrac{\Phi_1(p)}{1-\Phi_1(p)\cdot\Phi_2(p)}$.

Структурный подход дает возможность представлять реальные динамические модели объектов как конечную комбинацию простых моделей и, кроме того, определять динамические характеристики реальных объектов [1–3].

Остановимся теперь на некоторых более широких классах операторов, в которых целесообразно искать аппроксимацию оператора $A(t)$, и на их аналитическом представлении. Для простоты изложения будем рассматривать объект с одним выходом. Если в (2) Ψ — знак функции, то Ψ означает статическую характеристику; если же Ψ — знак функционала от $X(u)$, $u\le t$, то Ψ означает динамическую характеристику. В дискретной форме (2) перепишется в виде

$$y^{(j)}=\Psi\left(x^{(j)},t_j\right),\ j=1,2,\ldots,N,\ldots$$

в случае статической характеристики, и в виде

$$y^{(j)}=f\left(x^{(j)},x^{(j-1)},\ldots,x^{(j-r)},t_j\right),\ j=1,2,\ldots,N,\ldots, \tag{16}$$

где $x^{(j-p)}=x\left(t_j-p\Delta t\right)$, $p=\overline{0,r}$, $y^{(j)}=y\left(t_j\right)$ — в случае динамической характеристики. Здесь f — знак функции, а $x^{(j-r)}$ соответствует последнему из значений x, от которого зависит $y^{(j)}$; если положить $r=0$, то получим статическую характеристику. Ввиду того, что роль параметров n и r различна, целесообразно рассматривать классы функций от n и от r переменных независимо друг от друга.

Явные нелинейные модели. Чаще всего встречаются на практике следующие нелинейные операторы:

1. Оператор Немыцкого f:

$$y(t)=f\left[x(t),t\right], \tag{17}$$

где $f\left[x,t\right]$ непрерывна относительно x для всех t и измерима относительно t при всех значениях x. Можно также рассматривать нелинейный оператор вида

$$y(t)=\int_0^t f\left[x(\tau),t\right]d\tau .$$

2. Если нелинейная модель (17) применяется совместно с линейной, описываемой интегральным линейным оператором A, то целесообразно вводить в рассмотрение оператор Гаммерштейна H:

$$H = Af .$$

3. Оператор Урысона U:

$$y(t)=U(x)=\int_0^T K\left[t,\tau,x(\tau)\right]d\tau .$$

Если $K(t,\tau,x)$, где $t,\tau\in\left[0,T\right]$, $-\infty<x<\infty$, есть функция, непрерывная относительно x и $\left|K(t,\tau,x)\right|\le R(t,\tau)\left(a+b\left|x\right|^{\alpha}\right)$, где $\int_0^T\int_0^T R(t,\tau)\Big|^{\alpha+1}dt\,d\tau<\infty, a,b,\alpha>0$, то оператор U действует в пространстве $L_p\left(p=\alpha+1\right)$ и является вполне непрерывным.

4. В динамических моделях, встречаемых на практике, часто приходится иметь дело с последовательно соединенными линейными и нелинейными звеньями. Для примера рассмотрим две линейные модели, описываемые операторами

$$A_1(x)=\int_0^t k_1(t,\tau)x(\tau)d\tau\ ,\ A_2(x)=\int_0^t k_2(t,\tau)x(\tau)d\tau\ ,$$

разделенные нелинейным звеном, которое задается соотношением $f\left[x\right]=\sum_1^n \alpha_p x^p$. Тогда оператор всей системы принимает вид

$$y(t)=B(x)=A_2\left\{f\left[A_1(x)\right]\right\}=\sum_{p=1}^{n}\alpha_p\int_0^t d\tau k_2(t,\tau)\left(\int_0^\tau k_1(\tau,s)x(s)ds\right)^p .$$

Обобщением оператора этого типа является оператор Лихтенштейна-Ляпунова L :

$$L(x)=\sum_{p_1,p_2,\dots,p_\nu=0}^{N}\int_0^T\dots\int_0^T k_{p_1,p_2,\dots,p_\nu}(t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_\nu)\cdot x^{p_1}(\tau_1)x^{p_2}(\tau_2)\dots$$
$$\dots x^{p_\nu}(\tau_\nu)d\tau_1\dots d\tau_\nu .$$

Если $k_{p_1,p_2,\dots,p_\nu}(t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_\nu)$ непрерывны в $\nu+1$ - мерном пространстве параметров τ , t и $|x(t)|\le a$, то оператор L вполне непрерывен в шаре радиуса a пространства C .

Конечно, не все нелинейные модели поддаются описанию с помощью операторов, связывающих в явном виде выход модели с ее входом. Если, например, в рассматриваемой системе существует обратная связь, то эта система описывается операторным уравнением типа $y-B(y,x)=x$, где B есть нелинейный оператор. В следящей системе оператор B часто удается представить в виде оператора Гаммерштейна.

Нелинейные динамические системы [3], описываемые с помощью нелинейных дифференциальных уравнений, можно обычно свести к эквивалентным им интегральным уравнениям. Возьмем для примера уравнение $\dfrac{dx}{dt}=f\left[x(t),t\right]+y^0(t)$, где x, y^0, f могут быть также векторами. Это уравнение при условии $x(0)=x_0$ может быть представлено в виде

$$x(t)=x_0+\int_0^t f\left[x(\tau),\tau\right]d\tau+\int_0^t y^0(\tau)d\tau .$$

Для этого достаточно, чтобы подынтегральные функции были интегрируемы.

В общем случае $A(t)$ в (1) является произвольным непрерывным оператором, для которого справедлива теория непрерывных операторов.

Динамические характеристики. Рассмотрим зависимость (1). По любым двум из трех величин $X(t)$, $Y^0(t)$, $A(t)$ можно пытаться найти третью.

1. При известных $X(t)$ и $Y^0(t)$ найти $A(t)$ — задача идентификации объекта.

2. При известных $Y^0(t)$ и $A(t)$ найти $X(t)$ — задача восстановления входного сигнала; для ее решения применима соответствующая теория.

Рассмотрим следующий подход к решению частной задачи. Если динамический объект с достаточной точностью описывается передаточной функцией вида

$$\Phi(p)=\frac{L(p)}{M(p)}=\frac{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_0}{p^n+b_{n-1}p^{n-1}+...+b_0}=1+\frac{c_{n-1}p^{n-1}+...+c_0}{p^n+b_{n-1}p^{n-1}+...+b_0}=$$
$$=1+\Phi_1(p),$$

где многочлены $L(p)$ и $M(p)$ имеют нули в левой полуплоскости p (т. е. $\Phi(p)$ и $\left[\Phi(p)\right]^{-1}$ являются аналитическими и ограниченными при $\operatorname{Re} p \geq 0$), то соответствующий оператор $A(t)$ может быть записан в виде

$$y(t)=x(t)+\int_0^t k_1(t-\tau)x(\tau)d\tau ,$$

где $k_1(t)$ есть обратное преобразование Лапласа функции $\Phi_1(p)$. Этот оператор имеет непрерывное ядро $k_1(t)$ и действует в пространстве непрерывных функций C. Он является ограниченным оператором. Оператор, обратный оператору A, будет линейным и ограниченным в пространстве C:

$$x(t)=y(t)+\int_0^t k_2(t-\tau)y(\tau)d\tau .$$

Ядро $k_2(t)$ получим, разлагая $\left[\Phi(p)\right]^{-1}$ по формуле

$$\left[\Phi(p)\right]^{-1}=\frac{M(p)}{L(p)}=1+\frac{d_{n-1}p^{n-1}+...+d_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_0}=1+\Phi_2(p)$$

и находя обратное преобразование Лапласа функции $\Phi_2(p)$.

Может быть получена оценка полной абсолютной погрешности Δ вычисления $R=\int_0^t k(u)y(t-u)du$ на универсальной машине с τ-разрядной сеткой у мантисс чисел по формуле

$$R \approx \sum_{j=0}^{n-1} \oplus y_{\varepsilon}\left(t - j\Delta t\right) \otimes \left(\int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} k_{\varepsilon}\left(u\right) du \right)_{\tau}, \tag{18}$$

$$\int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} k_{\varepsilon}\left(u\right) du = h_{\varepsilon}\left(\left(j+1\right)\Delta t\right) - h_{\varepsilon}\left(j\Delta t\right),$$

где

$$n\Delta t = t, \left| y^{0}\left(t - j\Delta t\right) - y_{\varepsilon}^{0}\left(t - j\Delta t\right) \right| \le \varepsilon, \quad \left| k_{2}\left(u\right) - k_{2\varepsilon}\left(u\right) \right| \le \varepsilon,$$

$$\int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} k\left(u\right) du = h\left(\left(j+1\right)\Delta t\right) - h\left(j\Delta t\right).$$

Она имеет вид (с учетом лишь первой степени $2^{-\tau}$)

$$\Delta \le c_{1}\omega_{y}\left(\Delta t\right) + \left[c_{1} + 2\Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \left| y_{\varepsilon}\left(t - j\Delta t\right) \right| \right] \varepsilon + \\ +1,06\left[c_{1} + 2t\varepsilon + c_{2}\right] \max_{j} \left| y_{\varepsilon}\left(t - j\Delta t\right) \right| \left(n+4\right) 2^{-\tau}, \tag{19}$$

где $\omega_{y}\left(\Delta t\right)$ — модуль непрерывности функции *y*, $c_{1} = \int_{0}^{t} \left| k\left(u\right) \right| du$, $c_{2} \le 4 \max_{j} \left| h_{\varepsilon}\left(j\Delta t\right) \right|$, $h_{\varepsilon}\left(t\right)$ — экспериментально полученная переходная характеристика объекта. При $\tau = \infty$ оценка (19) неулучшаемая с точностью до сколь угодно малого слагаемого.

Часто в практических задачах порядок полинома $L\left(p\right)$ ниже порядка полинома $M\left(p\right)$. К тому же для некоторых объектов полином $L\left(p\right)$ имеет нули, расположенные в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > c$. В результате обратные операторы становятся неограниченными. В связи с этим для задач восстановления входных сигналов применяются другие способы, в частности способ введения обратных связей.

В дискретной постановке для линейной аппроксимации динамической модели (16) получаем

$$y^{0}\left(t_{j}\right) \approx \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=1}^{m} P_{k+im} x_{k} + \left(t_{j} - i\Delta t\right), \; j = 1, 2, \ldots N, \ldots .$$

В предположении, что $P_{k+im} x_{k} = \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} k_{s}\left(\tau\right) d\tau$ известны, задача восстановления $x_{k}\left(t\right)$ сводится в общем случае к решению системы линейных алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей.

Мы подробно остановились на случае, когда между входными и выходными величинами с достаточной точностью существует линейная зависимость. В общем случае будем искать входное воздействие $X(t)$ с дополнительными ограничениями: $X(t) \in \pi_m$, которые минимизируют

$$I(X) = \left\| Y^0(t) - A(t)[X] \right\|. \tag{20}$$

Здесь $\| \quad \|$ означает длину вектора в R_m. Иными словами, задача восстановления входного сигнала по известным $Y^0(t)$ и $A(t)$ сводится к задаче нелинейного программирования.

3. При известных $X(t)$ и $A(t)$ найти $Y^0(t)$. В этом случае задача сводится к вычислению $Y^0(t)$. При этом необходимо оценить полную погрешность определения $Y^0(t)$. В случае, когда известна переходная характеристика объекта, $Y(t)$ целесообразно вычислять, пользуясь соотношениями (3)–(7), (18).

В случае, когда известна частотная характеристика $\Phi(i\omega)$ или передаточная функция $\Phi(p)$, $y(t)$ целесообразно вычислять, используя соотношения (14), (15). Обобщением трех приведенных выше постановок является минимизация функционала (20) по $A(t)$, $Y^0(t)$, $X(t)$ при некоторых ограничениях. Такие задачи могут встретиться, например, в задачах проектирования систем автоматического управления.

Мы рассмотрели динамические характеристики объекта управления в случае, когда вектор N возмущающих входных величин отсутствует. На практике вектор N обычно отличен от нуля. В этом случае вместо указанной выше зависимости (2) принимают

$$\bar{Y}^0 = \bar{\Psi}(X, t) = M\left[\frac{\Psi(X, t)}{X}\right],$$

причем условное по X математическое ожидание берется по N. В случае, если $\left[\dfrac{\Psi(X, t)}{X}\right]$ — эргодический стационарный случайный процесс, за оценку математического ожидания принимают

$$\bar{Y}_T = \frac{1}{T}\int_0^T Y(t)\,dt,$$

где T — время усреднения по N. После этого все приведенные выше рассуждения справедливы, если заменить Y на $\bar{Y}$ (или $\bar{Y}_T$).

Выводы. Явные динамические модели объектов представляют собой интегральные операторы с переменным верхним пределом интегрирования, причем операторы являются скалярными, в случае наличия в объекте одного входа и одного выхода, или матричными, при наличии многих входов и выходов. Полученные по динамическим характеристикам интегральные операторы представляют собой наиболее простые и вместе с тем универсальные динамические модели, поскольку обеспечивают адекватность воспроизведения свойств объекта в пределах точности априорно заданных динамических характеристик и не требуют при своем формировании каких-либо методов аппроксимации. Непараметрические модели динамики сложно-структурированных объектов формируются в виде линейных или нелинейных интегральных уравнений, а также их систем. Свойства получаемых уравнений полностью определяются ядрами этих уравнений, которые и представляют собой заданные динамические характеристики. Ядра имеют вид функций двух переменных, разностных — в случае стационарных объектов или произвольных — в случае нестационарных объектов.

Список использованной литературы:

1. Кубрак А. І. Комп'ютерне моделювання та ідентифікація автоматичних систем : навч. посібник / А. І. Кубрак, А. І. Жученко, М. З. Кваско. — К. : Політехніка, 2004. — 424 с.
2. Верлань, А. Ф. Математическое моделирование непрерывных динамических систем / А. Ф. Верлань, С. С. Москалюк. — К. : Наук. думка, 1988. — 287 с.
3. Молчанов А. А. Моделирование и проектирование сложных систем / А. А. Молчанов. — К. : Вища школа, 1988. — 359 с.

The article is devoted to the questions of obtaining linear and nonlinear nonparametric models of objects explicitly. Dynamic characteristics are presented for the combined models of various structures.

Key words: *dynamic model, the impulse response function, transient response, frequency characteristic, transfer function, Laplace transform.*

Отримано: 28.03.2014