6. Vogel C. R. Computational methods for inverse problems / C. R. Vogel. — Philadelphia : SIAM, 2002. — 183 p.
7. Bruckner G. An inverse problem from the 2D-groundwater modelling / G. Bruckner, S. Handrock-Meyer, H. Langmach — Berlin : WIAS-Preprint, 1997. — № 343.
8. Chan T. F. Level set and total variation regularization for elliptic inverse problems with discontinuous coefficients / T. F. Chan, X.-C. Tai — UCLA, Math. Depart. — CAM-report 03-15, 2003.

The new efficient constructive approach to mathematical modeling of the displacement of hydrocarbons from formation in conditions mutual influence the characteristics of the process and the medium and identification of model parameters was developed on the basis the synthesis of numerical methods complex analysis and summary representations in conjunction with decomposition of problem.

Key words: *quasiconformal mappings, complex quasipotential, summary representations method, decomposition of problem, parameters identification.*

Отримано: 19.06.2014

УДК 004.421:519.64

Д. А. Верлань*, аспирант,
В. А. Тихоход,** канд. техн. наук

* Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко, г. Киев,
** Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», г. Киев

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Рассмотрены вопросы численной реализации интегральных динамических моделей путем применения квадратурных формул закрытого типа повышенной точности. Предложены рекуррентные алгоритмы решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра и их систем.

Ключевые слова: *интегральные динамические модели, квадратурные формулы, рекуррентные алгоритмы, алгоритмы решения интегральных уравнений.*

Введение. Математические модели различных объектов в форме нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра представляют собой эффективный аппарат для решения многих теоретических и практических задач исследования широкого класса динамических объектов [1; 2]. Наиболее распространенные численные алгоритмы решения данных уравнений основаны на применении квадратурных формул различного порядка точности [1–4]. Перспективным развитием этого подхода являются методы, представляющие собой аналоги известных в теории дифференциальных уравнений методов типа Рунге-Кутта [5].

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса замкнутого вида. В работе предлагается два численных алгоритма решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра, точность которых имеет порядок $O\left(h^6\right)$ и $O\left(h^8\right)$. Эти алгоритмы основаны на применении к интегральному члену уравнения пяти- и семиточечных квадратурных формул Ньютона-Котеса замкнутого типа. Оба алгоритма предполагают составление начала таблицы численного решения. Если начало таблицы определенно, то для нахождения решения в последующих узлах приходится каждый раз решать только одно нелинейное уравнение. Для вычисления значений искомого решения в начале таблицы, как и для вычисления решений в последующих узлах используется метод дифференцирования по параметру [4, 5]. Поскольку в основе обоих алгоритмов лежит одна и та же идея, то в работе подробно излагается только алгоритм порядка $O\left(h^8\right)$.

Алгоритм решения нелинейных интегральных уравнений порядка $O\left(h^8\right)$. Задача, таким образом, состоит в том, чтобы на отрезке $\left[x_0, x_0 + L\right]$ найти численное решение нелинейного интегрального уравнения

$$y\left(x\right) = f\left(x\right) + \int_{x_0}^{x} F\left(x, s, y\left(s\right)\right) ds, \qquad (1)$$

где функции $f\left(x\right)$ и $F\left(x, s, y\left(s\right)\right)$ обладают определенной гладкостью, необходимой для применения соответствующих квадратурных формул.

Выбираем шаг h и рассмотрим уравнение (1) в узловых точках $x_i = x_0 + ih\left(i = 0, 1, 2, \ldots, N; Nh = L\right)$ некоторой равномерной сетки. Имеем

$$y\left(x_i\right) = f\left(x_i\right) + \int_{x_0}^{x_i} F\left(x_i, s, y\left(s\right)\right) ds, \ \left(i = 0, 1, 2, \ldots, N\right). \qquad (2)$$

Для применения к интегральному члену уравнения (2) семиточечной квадратурной формулы Ньютона-Котеса

$$\int_{x_i}^{x_i+6} f\left(x\right) dx = \frac{h}{140}\left[41 f\left(x_i\right) + 216 f\left(x_{i+1}\right) + 27 f\left(x_{i+2}\right) + \right.$$

$$+272 f\left(x_{i+3}\right)+27 f\left(x_{i+4}\right)+216\left(x_{i+5}\right)+41\left(x_{i+6}\right)\Big]- \qquad (2')$$

$$-\frac{9}{1400} h^9 f^{(8)}(\xi), \quad \xi \in\left(x_i, x_{i+6}\right)$$

представим его для $i \geq 7$ в виде

$$y\left(x_i\right)=f\left(x_i\right)+\int_{x_0}^{x_k} F\left(x_i, s, y(s)\right) d s+\int_{x_k}^{x_i} F\left(x_i, s, y(s)\right) d s, \qquad (3)$$

где $i=7,8, \ldots, N$, индекс $k=i-6 \cdot entier\left(\frac{i}{6}\right)$. Значения искомого решения уравнения (1) в узлах $x_1, x_2, \ldots, x_6$ (начало таблицы) вычисляются особым способом, о чем будет сказано ниже.

Применяя теперь к первому интегралу уравнения (3) формулу (2′) с шагом $h_k=\frac{kh}{6}\,(k=1,2,3,4,5)$, а ко второму — (2′) с шагом h и отбрасывая соответствующий остаточный член R_1, порядка $O\left(h^8\right)$, получим систему нелинейных уравнений

$$y_i=f_i+\frac{kh}{6} \sum_{j=0}^{6} A_j F_{i, \frac{kj}{6}}+h \sum_{j=k}^{i-1} A_j F_{ij}+h A_i F_{ii}, \ (i=7,8, \ldots, N). \qquad (4)$$

В системе (4) символами $y_i, f_i, F_{i, \frac{kj}{6}}$ и F_{ij} обозначены соответственно приближенные значения искомого решения $y(x)$, известных функций $f(x)$, $F(x, s, y(s))$ в точках $\left(x=x_i, s=x_{\frac{kj}{6}}\right)$ для первой суммы и в точках $\left(x=x_i, s=x_j\right)$ для второй суммы; A_j — коэффициенты квадратурной формулы (2′).

Из формул (3), (4) и условия Липшица, которому удовлетворяет по третьему аргументу функция $F(x, s, y(s))$, следует справедливость неравенства

$$\left|\varepsilon_i\right|=\left|y\left(x_i\right)-y_i\right| \leq \frac{R_1}{1-hC} \exp \left(\frac{CL}{1-hC}\right), \ (i=0,1,2, \ldots, N), \qquad (5)$$

где C — некоторая константа, зависящая от коэффициентов квадратурной функции (2′) и константы Липшица, $y\left(x_i\right)$ и y_i — соответственно точное и приближенное решения уравнения (1) в узле x_i. Поскольку для достаточно гладких функций $f(x)$, $F(x, s, y(s))$ и $y(x)$ остаточный член R_1 имеет порядок $O\left(h^8\right)$, то и $|\varepsilon_i|$ имеет такой же порядок. А это значит, что метод, определяемый формулой (4), сходится, причем порядок сходимости равен восьми.

Если начало таблицы решений уравнения (1) составлено, то значения искомого решения в промежуточных узлах $x_{\frac{kj}{6}}\,(k,\ j=1, 2, \ldots, 6)\,y_{\frac{kj}{6}}$, необходимые для вычисления значений $F_{i,\frac{jk}{6}}$ на отрезке $\left[x_0, x_k\right]$, вычисляются только один раз по интерполяционным формулам Лагранжа.

Погрешность аппроксимации R_2 формул (5) имеет порядок $O\left(h^7\right)$. И поскольку эти формулы подставляют в уравнения (4), то суммарная погрешность аппроксимации исходной задачи (1) конечно-разностной задачей (4) $R = R_1 + h \cdot R_2$, очевидно, будет иметь порядок $O\left(h^8\right)$.

Таким образом, решение исходной задачи свелось к последовательному решению нелинейных уравнений, дающих приближенное решение уравнение (1) в узловых точках $x_i\ (i = 7, 8, \ldots, N)$ с точностью $O\left(h^8\right)$.

Для решения нелинейных уравнений (4) применим метод дифференцирования по параметру. Для этого введем в уравнение (4) параметр λ и наряду с системой (4) рассмотрим систему уравнений

$$y_i = \psi_i + \lambda h A_i F_{ii},\ (i = 7, 8, \ldots, N), \tag{6}$$

где

$$\psi_i = f_i + \frac{kh}{6}\sum_{j=0}^{6} A_j F_{i,\frac{kj}{6}} + h\sum_{j=k}^{i-1} A_j F_{ij},\ (i = 7, 8, \ldots, N). \tag{7}$$

Система (6) при $\lambda = 1$ совпадет с системой (4), а при $\lambda = 0$ легко разрешается относительно неизвестных

$$y_i\big|_{\lambda=0} = \psi_i,\ (i = 7, 8, \ldots, N). \tag{8}$$

Предполагая теперь, что y_i дифференцируемые функции параметра λ, и дифференцируя (6) по λ, в каждой узловой точке получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy_i}{d\lambda} = \frac{hA_i F_{ii}}{1 - \lambda h A_i \dfrac{\partial F_{ii}}{\partial y_i}},\ (i = 7, 8, \ldots, N), \tag{9}$$

Уравнение (9) численно интегрируется на сегменте [0, 1] при начальном условии (8). Численное значение решения задачи (9), (8) при $\lambda = 1$ является приближенным решением уравнения (4) для любого $i = 7, 8, \ldots, N$, а, следовательно, и исходного уравнения (1) в соответствующих точках. Таким образом, решение исходной задачи сведено к решению задачи Коши для уравнения первого порядка (9) при начальном условии (8), которое легко вычисляется по формулам (7) и (5), если, конечно, начало таблицы уже определено.

Рассмотрим теперь алгоритм для определения неизвестных y_i в узловых точках, соответствующих началу таблицы $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Для этого в указанных точках запишем уравнение (1) и к интегральному члену каждого из шести уравнений $(y_0 = f_0)$ применим квадратурную формулу (2′) соответственно с шагами $h_k = \dfrac{kh}{6}$, $(k = 1, 2, \ldots, 6)$. Получим систему нелинейных уравнений относительно неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_6$:

$$y_i = f_i + \frac{i}{6} \cdot \frac{h}{140}\left(41F_{i0} + 216F_{i,\frac{i}{6}} + 27F_{i,\frac{i}{3}} + 272F_{i,\frac{i}{2}} + \right.$$
$$\left. + 27F_{i,\frac{2i}{3}} + 216F_{i,\frac{5i}{6}} + 41F_{ii}\right), (i = 1, 2, \ldots, 6), \tag{10}$$

где в правую часть каждого уравнения вместо $y_{\frac{ij}{6}}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 6)$ подставляют их значения через y_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ в соответствии с формулой (5).

Для решения полученной системы шести уравнений также применим метод дифференцирования по параметру. Перед неизвестными членами правой части системы (10) введем параметр λ и рассмотрим систему вида

$$y_i = f_i + \frac{i}{6} \cdot \frac{h}{140} 41F_{i0} + \lambda \frac{i}{6} \cdot \frac{h}{140}\left(216F_{i,\frac{i}{6}} + 27F_{i,\frac{i}{3}} + 272F_{i,\frac{i}{2}} + \right.$$
$$\left. + 27F_{i,\frac{2i}{3}} + 216F_{i,\frac{5i}{6}} + 41F_{ii}\right), (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{11}$$

Эта система уравнений при $\lambda = 1$ переходит в систему (10), а при $\lambda = 0$ дает

$$y_i = f_i + \frac{i}{6} \cdot \frac{h}{140} 41F_{i0}, (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{12}$$

Предполагая, как и прежде, y_i дифференцируемыми функциями параметра λ и дифференцируя (11) по λ, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial y_i}{\partial\lambda}=\frac{i}{6}\frac{h}{140}\left(216F_{i,\frac{i}{6}}+27F_{i,\frac{i}{2}}+272F_{i,\frac{i}{2}}+27F_{i,\frac{2i}{2}}+216F_{i,\frac{5i}{2}}+41F_{i,i}\right)+$$
$$+\lambda\frac{i}{6}\frac{h}{140}\left(216\frac{\partial F_{i,\frac{i}{6}}}{\partial\lambda}+27\frac{\partial F_{i,\frac{i}{2}}}{\partial\lambda}+272\frac{\partial F_{i,\frac{i}{2}}}{\partial\lambda}+27\frac{\partial F_{i,\frac{5i}{6}}}{\partial\lambda}+216\frac{\partial F_{i,\frac{5i}{6}}}{\partial\lambda}+41\frac{\partial F_{i,i}}{\partial\lambda}\right), \quad (13)$$

где $i=\overline{1,6}$.

Подставляя в (13) значения частных производных, получим систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую представим в матричной форме

$$A\frac{\overrightarrow{\partial y}}{\partial\lambda}=\vec{b}. \quad (14)$$

Здесь

$$\vec{y}=\left[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\right],\vec{b}=\left[b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\right]$$

$$b_i=\frac{i}{6}*\frac{h}{150}\left(216F_{i,\frac{i}{6}}+27F_{i,\frac{i}{3}}+272F_{i,\frac{i}{2}}+27F_{i,\frac{2i}{3}}+216F_{i,\frac{5i}{3}}+41F_{i,i}\right),\ i=\overline{1,6},$$

а элементы матрицы A вычисляются по соответствующим формулам.

Интегрируя при начальном условии (12) систему (6) на сегменте [0, 1] каким-либо численным методом, имеющим соответствующую степень точности, при $\lambda=1$ получим приближенные значения искомого решения $y_1, y_2, \ldots, y_6$, уравнения (1).

Имея начало таблицы, значения неизвестной функции $y_i\ \left(i=7,8,\ldots,N\right)$ определяем путем последовательного численного решения обыкновенного дифференциального уравнения (9) при начальном условии (8), как было указано выше.

Таким образом, задача численного решения нелинейного интегрального уравнения (1) с точностью порядка $O\left(h^8\right)$ свелась к решению задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения в каждом узле сетки, а в начале таблицы — для системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений.

Алгоритм решения нелинейных интегральных уравнений порядка $O\left(h^6\right)$. Если к интегральному члену уравнения (2) применить квадратурную формулу

$$\int_{x_i}^{x_{i+4}} f(x)\,dx = \frac{h}{45}\left(14f_i + 64f_{i+1} + 24f_{i+2} + 64f_{i+3} + 14f_{i+4}\right) - \\ -\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi),\ \xi \in (x_i, x_{i+4}) \tag{15}$$

и повторить те же рассуждения, то получим алгоритм численного решения уравнения (1) с точностью порядка $O\left(h^6\right)$. В этом алгоритме для получения начала таблицы приходится решать задачу Коши для системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. В [6] был предложен алгоритм численного решения уравнения (1), порядок точности которого также равен $O\left(h^6\right)$, причем решается система четырех уравнений, прибегая каждый раз к интерполированию по формулам Лагранжа и используя квадратурные формулы Лобатто.

Программная реализация и численные эксперименты. Приведенные выше алгоритмы были реализованы средствами пакета Matlab. В качестве примера в таблице 1 приводятся результаты численного решения интегрального уравнения

$$y(x) = x + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}e^x + \int_0^x e^{x-s}\sin y(s)\,ds, \tag{16}$$

точное решение которого $y(x) = x$.

В первом столбце приводятся значения аргумента, во втором и третьем соответственно — значения приближенного решения и его погрешности, вычисленные по алгоритму, точность которого имеет порядок $O\left(h^6\right)$, а в четвертом и пятом — значения приближенного решения и соответствующих погрешностей, вычисленных по алгоритму с точностью порядка $O\left(h^8\right)$. Вычисления выполнены с шагом $h = 0,05$, а соответствующие системы дифференциальных уравнений интегрировались с шагом $\Delta\lambda = 0,1$.

Предложенные алгоритмы применимы также к численному решению систем n нелинейных уравнений с переменным верхним пределом. В этом случае на каждом шаге придется численно решать задачу Коши для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для получения начала таблицы необходимо решать задачу Коши для системы $6n$ дифференциальных уравнений в алгоритме, точность которого порядка $O\left(h^8\right)$, и для системы $4n$ дифференциальных уравнений в алгоритме, точность которого порядка

$O\left(h^6\right)$. Приведенные алгоритмы с некоторыми видоизменениями могут быть также применены к решению задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений и их систем.

Таблица 1

Результаты численного решения интегрального уравнения (16)

1	2	3	4	5
0,1	0,1000000000004190	$0{,}419\cdot10^{-12}$	0,0999999999999999969	$-0{,}31\cdot10^{-15}$
0,2	0,2000000000595550	$0{,}596\cdot10^{-10}$	0,1999999999998818	$-0{,}118\cdot10^{-12}$
0,3	0,3000000000657521	$0{,}658\cdot10^{-10}$	0,2999999999956357	$-0{,}437\cdot10^{-11}$
0,4	0,4000000001443862	$0{,}144\cdot10^{-9}$	0,3999999999999200	$-0{,}800\cdot10^{-13}$
0,5	0,5000000001578552	$0{,}158\cdot10^{-9}$	0,4999999999999140	$-0{,}860\cdot10^{-13}$
0,6	0,6000000002603616	$0{,}260\cdot10^{-9}$	0,5999999999998592	$-0{,}141\cdot10^{-12}$
0,7	0,7000000002822940	$0{,}282\cdot10^{-9}$	0,6999999999999360	$-0{,}640\cdot10^{-13}$
0,8	0,8000000004127365	$0{,}413\cdot10^{-9}$	0,7999999999999533	$-0{,}467\cdot10^{-13}$
0,9	0,9000000004425630	$0{,}443\cdot10^{-9}$	0,8999999999999016	$-0{,}984\cdot10^{-13}$
1,0	1,000000000603601	$0{,}604\cdot10^{-9}$	1,000000000000032	$0{,}32\cdot10^{-13}$
1,1	1,100000000637938	$0{,}638\cdot10^{-9}$	0,100000000000084	$0{,}84\cdot10^{-13}$
1,2	1,200000000829874	$0{,}830\cdot10^{-9}$	1,200000000000036	$0{,}36\cdot10^{-13}$
1,3	1,300000000861562	$0{,}862\cdot10^{-9}$	1,300000000000235	$0{,}235\cdot10^{-12}$
1,4	1,400000001081868	$0{,}108\cdot10^{-8}$	1,400000000000326	$0{,}326\cdot10^{-12}$
1,5	1,500000001099722	$0{,}110\cdot10^{-8}$	1,500000000000272	$0{,}272\cdot10^{-12}$
1,6	1,600000001343533	$0{,}134\cdot10^{-8}$	1,600000000000548	$0{,}548\cdot10^{-12}$
1,7	1,700000001333142	$0{,}133\cdot10^{-8}$	1,700000000000674	$0{,}674\cdot10^{-12}$
1,8	1,800000001594877	$0{,}159\cdot10^{-8}$	1,800000000000595	$0{,}595\cdot10^{-12}$
1,9	1,900000001540408	$0{,}154\cdot10^{-8}$	1,900000000000948	$0{,}948\cdot10^{-12}$
2,0	2,000000001816219	$0{,}182\cdot10^{-8}$	2,000000000001098	$0{,}110\cdot10^{-11}$
2,1	2,100000001702636	$0{,}170\cdot10^{-8}$	2,100000000000966	$0{,}966\cdot10^{-12}$
2,2	2,200000001992925	$0{,}199\cdot10^{-8}$	2,200000000001399	$0{,}140\cdot10^{-11}$
2,3	2,300000001807772	$0{,}181\cdot10^{-8}$	2,300000000001565	$0{,}157\cdot10^{-11}$
2,4	2,400000002118960	$0{,}212\cdot10^{-8}$	2,400000000001358	$0{,}136\cdot10^{-11}$
2,5	2,500000001853005	$0{,}185\cdot10^{-8}$	2,500000000001888	$0{,}189\cdot10^{-11}$
2,6	2,600000002198102	$0{,}220\cdot10^{-8}$	2,600000000002075	$0{,}208\cdot10^{-11}$
2,7	2,700000001844643	$0{,}184\cdot10^{-8}$	2,700000000001783	$0{,}178\cdot10^{-11}$
2,8	2,800000002242716	$0{,}224\cdot10^{-8}$	2,800000000002456	$0{,}245\cdot10^{-11}$
2,9	2,900000001795878	$0{,}180\cdot10^{-12}$	2,900000000002590	$0{,}259\cdot10^{-11}$
3,0	3,000000002270985	$0{,}227\cdot10^{-12}$	3,000000000002324	$0{,}232\cdot10^{-11}$

Замечания о решении систем интегральных уравнений. Предложенные алгоритмы применимы также к численному решению систем n нелинейных уравнений с переменным верхним пределом. В этом случае на каждом шаге придется численно решать задачу Коши для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для получения начала таблицы необходимо решать задачу Коши для системы $6n$ дифференциальных уравнений в алгоритме, точность которого порядка $O\left(h^8\right)$, и для системы $4n$ дифференциальных уравнений в алгоритме, точность которого порядка $O\left(h^6\right)$. Приведенные алгоритмы с некоторыми видоизменениями могут быть также применены к решению задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений и их систем.

Выводы. Таким образом, предложенные численные алгоритмы решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра II рода основаны на приведении к задаче рекуррентного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяют с высокой точностью исследовать динамические системы, модели которых представляются интегральными уравнениями.

Список использованной литературы:

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 542 с.
2. Baker C. T. H. A perspective on the numerical treatment of Volterra equation / C. T. H. Baker // Journal of computational and applied mathematics. — North-Holland, 2000. — Vol. 125, № 1–2. — P. 217–251.
3. Brunner H. The Numerical Solution of Volterra Equation / H. Brunner, P. J. van der Houwen. — Amsterdam : North-Holland, 1986. — 588 p.
4. Верлань А. Ф. Комбинированные квадратурные алгоритмы реализации интегральных моделей многосвязных динамических систем / А. Ф. Верлань, В. А. Тихоход // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет. — 2008. — Вип. 1. — С. 19–26.
5. Каханер Д. Численные методы и математическое обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. — М. : Мир, 1998. — 575 с.
6. Campbell G. M. A block by block method numerical solution of Volterra integral equations / G. M. Campbell, I. T. Day. — 1971. — Vol. 11, № 1. — P. 120.

The questions of the study of integral dynamic models by applying the close type quadrature formula of high occuracy. Described by recurrence algorithms for solving nonlinear Volterra integral equations and their systems.

Key words: *integral models of dynamic systems, quadrature formulas, recurrence algorithm, algorithms for solving integral equations.*

Отримано: 11.07.2014