

The method of integral transforms in combination with the method of main solutions built an exact analytical solution of a mathematical model of oscillatory processes (hyperbolic boundary value problem) in wedge-shaped piecewise homogeneous solid cylinder.

Key words: *modelling, oscillating, hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conditions of conjugation, integral transformation, the influence function, Green's function.*

Отримано: 25.06.2014

УДК 004.94

В. А. Іванюк, канд. техн. наук,

В. В. Понеділок, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

АНАЛІТИЧНЕ ПОДАННЯ РЯДІВ ВОЛЬТЕРРИ НА ОСНОВІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

У статті розглянуто підхід до побудови математичних моделей у вигляді інтегрального ряду Вольтерри на основі застосування методу найменших квадратів для апроксимації функцій багатьох змінних. Досліджено за допомогою обчислювальних експериментів якість запропонованого підходу.

Ключові слова: *апроксимація, функції багатьох змінних, метод найменших квадратів, нелінійні динамічні системи, ядра Вольтерри, Matlab / Simulink.*

Вступ. Нелінійні динамічні моделі широко використовуються при дослідженні різноманітних технічних систем та процесів. У багатьох випадках такі системи описуються диференціальними моделями, в той же час відомо, що процес розв'язування нелінійних систем диференціальних рівнянь є достатньо складним. З іншої сторони, подання нелінійних систем у вигляді інтегральних рядів Вольтерри [1; 3] має такі позитивні властивості, як зручність та компактність математичного опису; високий рівень універсальності; достатньо висока стійкість методів чисельної реалізації.

Ряд Вольтерри в загальному випадку подається у вигляді

$$y(t) = \sum_{n_2=1}^{n_1} f_{n_2}(t), f_{n_2} = \int_0^t \dots \int_0^t K_{n_2}(s_1, \dots, s_{n_2}) \prod_{i=1}^{n_2} x(t-s_i) ds_i, t \in [0, T], (1)$$

де $x(t)$, $y(t)$ — відповідно вхідний і вихідний сигнали об'єкта, n_1 — деяке натуральне число, T — час перехідного процесу,

$K_{n_2}(s_1, \dots, s_{n_2})$ — ядра Вольтерри, причому $K_1(s)$ визначає лінійну складову динамічної системи. Основна проблема застосування рядів Вольтерри виникає при ідентифікації ядер Вольтерри, яка полягає в необхідності розв'язання типової оберненої задачі — чисельного диференціювання експериментальних залежностей:

$$K_1(t_1) = \frac{1}{A} \frac{df(t_1)}{dt_1}, \quad K_2(t_1, t_2) = \frac{1}{2A^2} \frac{\partial^2 f_2(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}, \dots,$$

$$K_{n_2}(t_1, \dots, t_{n_2}) = \frac{1}{n_2! A^{n_2}} \frac{\partial^{n_2} f_{n_2}(t_1, \dots, t_{n_2})}{\partial t_1 \dots \partial t_{n_2}}.$$

Застосування різницевих формул не завжди дає високу точність результатів. Для підвищення точності побудови моделей у вигляді ряду (1) та стійкості до завад в експериментальних даних пропонується визначати похідні функцій на основі їх апроксимаційних моделей побудованих в аналітичному вигляді. Одним із підходів є застосування метода найменших квадратів, який дозволяє отримувати аналітичні математичні моделі.

Необхідність і принципова важливість аналітичного представлення експериментальних залежностей визначають особливу актуальність розробки для цього відповідних методів, алгоритмів і програмних засобів.

Метою роботи є розробка та реалізація алгоритму побудови ядер рядів Вольтерри на основі метода найменших квадратів.

Одновимірне ядро. Для побудови одновимірного ядра $K_1(t_1)$ на основі алгоритму [4] необхідно знайти похідну функції $f(t_1)$, яка є результатом експерименту і задається точково

$$f(t_{1k}) \approx \varphi(t_{1k}) = z_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Ядро будемо у вигляді полінома $P(t_1) = \sum_{k=0}^n a_k t_1^k$, який визначається при умові мінімуму суми:

$$L(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^m [\varphi(t_{1k}) - P(t_{1k})]^2.$$

Оскільки $L(a_0, a_1, \dots, a_n)$ додатна і є неперервною, то існує її мінімум. Для пошуку значень коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_n при яких L мінімальна необхідно прирівняти частинні похідні L по a_l нулю:

$$\frac{\partial L(a_0, \dots, a_n)}{\partial a_l} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

Оскільки,

$$\frac{\partial L}{\partial a_l} = -2 \sum_{k=0}^m t'_{1k} [\varphi(t_{1k}) - P(t_{1k})] l = 0, 1, \dots, n, \quad (4)$$

відповідно система для коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_n матиме вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 m + a_1 \sum_{k=1}^m t_{1k} + \dots + a_n \sum_{k=1}^m t_{1k}^n = \sum_{k=1}^m z_k, \\ a_0 \sum_{k=1}^m t_{1k} + a_1 \sum_{k=1}^m t_{1k}^2 + \dots + a_n \sum_{k=1}^m t_{1k}^{n+1} = \sum_{k=1}^m z_k t_{1k}, \\ \dots \\ a_0 \sum_{k=1}^m t_{1k}^n + a_1 \sum_{k=1}^m t_{1k}^{n+1} + \dots + a_n \sum_{k=1}^m t_{1k}^{2n} = \sum_{k=1}^m z_k t_{1k}^n. \end{array} \right. \quad (5)$$

Розв'язавши систему (5) отримаємо коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_n .

Продиференціювавши $P(t_1)$ по t_1 отримаємо ядро інтегрального оператора

$$K_1(t_1) \approx \frac{dP(t_1)}{dt_1} = \sum_{k=0}^n k a_k t_1^{k-1}. \quad (6)$$

Двовимірне ядро. Розглянемо побудову ядра другого порядку $K_2(t_1, t_2)$.

Функція $f(t_1, t_2) \approx \varphi(t_1, t_2)$ задається у вигляді таблиць експериментальних даних з двома входами (таблиця 1).

Таблиця 1

Таблиця вхідних даних $\varphi(t_1, t_2)$

| | | | | | | |
|----------------------|----------------|----------------|-----|----------------|-----|----------------|
| $t_1 \backslash t_2$ | t_{21} | t_{22} | ... | t_{2k} | ... | t_{2n} |
| t_{11} | φ_{11} | φ_{12} | ... | φ_{1k} | ... | φ_{1n} |
| t_{12} | φ_{21} | φ_{22} | ... | φ_{2k} | ... | φ_{2n} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| t_{1s} | φ_{s1} | φ_{s2} | ... | φ_{sk} | ... | φ_{sn} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| t_{1m} | φ_{m1} | φ_{m2} | ... | φ_{mk} | ... | φ_{mn} |

Виконаємо апроксимацію функцій двох змінних $\varphi(t_1, t_2)$ виразом виду $P(t_1, t_2) = \sum_k a_k(t_2) t_1^k$. Визначення $P(t_1, t_2)$ потребує відшукання коефіцієнтів $a_0(t_2), a_1(t_2), \dots, a_n(t_2)$, що є функціями змінної t_2 . Для цього обирається ряд значень змінної $t_2 (t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2s})$ і вводяться функції однієї змінної:

$$\begin{cases} M_1(t_1) = \varphi(t_1, t_{21}); \\ M_2(t_1) = \varphi(t_1, t_{22}); \\ \dots\dots\dots \\ M_s(t_1) = \varphi(t_1, t_{2s}). \end{cases} \quad (7)$$

Кожну із цих функцій $M_1(t_1), \dots, M_s(t_1)$ можна апроксимувати поліномом, тобто кожна графа таблиці 1 вхідних даних піддається апроксимації поліномом n -го степеня, коефіцієнти якого задовольняють лінійній системі з симетричною матрицею (5). Розв'язуючи ці системи, знайдемо:

$$\begin{cases} P(t_1, t_{21}) = \sum_{k=0}^n a_k(t_{21}) t_1^k; \\ P(t_1, t_{22}) = \sum_{k=0}^n a_k(t_{22}) t_1^k; \\ \dots\dots\dots \\ P(t_1, t_{2s}) = \sum_{k=0}^n a_k(t_{2s}) t_1^k. \end{cases} \quad (8)$$

Відношення (8) показують, що для кожної функції $a_k(t_2)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) було знайдено ординати $a_k(t_{21}), a_k(t_{22}), \dots, a_k(t_{2s})$. Повторне застосування методу найменших квадратів дозволяє шляхом розв'язку системи виду (5) знайти наближення поліномом для $a_k(t_2)$.

Ядро визначається на основі диференціювання $P(t_1, t_2) = \sum_k a_k(t_2) t_1^k$, в результаті отримуємо:

$$K_2(t_1, t_2) \approx \frac{\partial^2 P(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \sum_{k=0}^n \left(k a_k t_1^{k-1} \sum_{l=0}^k l a_l t_2^{l-1} \right). \quad (9)$$

У загальному випадку багатомірні ядра визначаються шляхом апроксимації у вигляді та диференціювання виразу:

$$P(t_1, t_2, \dots, t_k) = \sum_{p=0}^n a_p(t_2, \dots, t_k) t_1^p.$$

Програмні засоби. На основі розробленого алгоритму створено програмні засоби для побудови ядер інтегральних рядів Вольтерри на основі експериментальних даних із використанням поданого вище алгоритму. Основні функції мають вигляд:

$$[K1] = \text{ApproxKernMnK1}(t, f, n),$$

де t — аргумент функції представлений у вигляді вектор рядка; f — значення функції $f(x)$ представлена у вигляді вектор-рядка; n — степінь апроксимації; $K1$ — ядро в символьному вигляді;

$$[K2] = \text{ApproxKernMNK2}(t1, t2, f, n),$$

де $t1$, $t2$ — аргументи функції представлені у вигляді вектор рядків; f — значення функції $f(t1, t2)$ представлені у вигляді матриці; n — степінь апроксимації; $K2$ — ядро в символьному вигляді.

Обчислювальний експеримент. Застосовуючи програмні засоби побудовано одновимірне ядро на основі експериментальних даних. Тестова функція має вигляд: $f(t) = e^t$. Похибка апроксимації функції методом найменших квадратів представлена на рис. 1, похибка отриманого ядра (після диференціювання $f(t)$) представлена на рис. 2. Також розглянуто випадок побудови ядра при наявності адитивного білого Гаусівського шуму в 80 дБ у вихідному сигналі. Отримані похибки представлені на рис. 3–4.

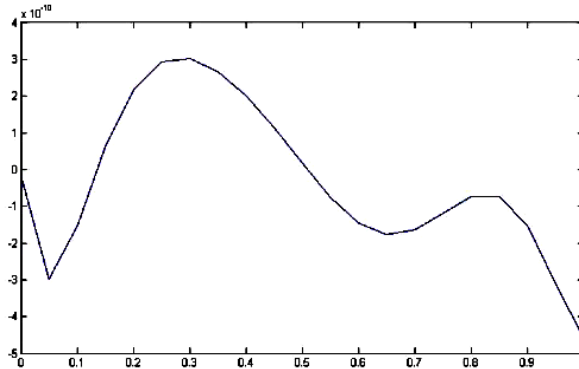


Рис. 1. Похибка апроксимації функції $f(t)$

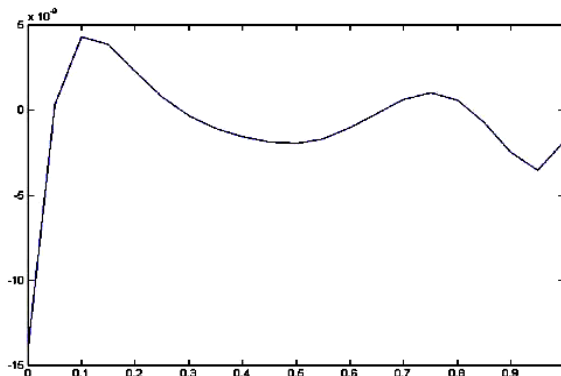


Рис. 2. Похибка апроксимації функції $\frac{df(t)}{dt}$

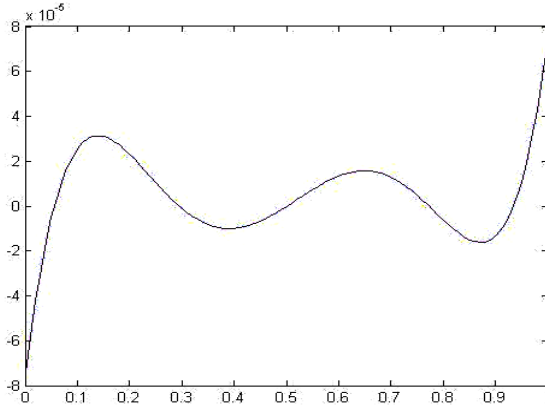


Рис. 3. Похибка апроксимації функції $f(t)$ із шумом

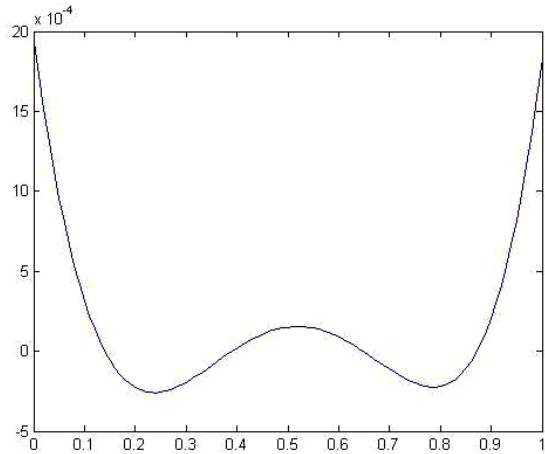


Рис. 4. Похибка апроксимації функції $\frac{df(t)}{dt}$ із шумом

При побудові двовимірного ядра використовувалась тестова функція: $f(t_1, t_2) = e^{t_1+t_2}$. Похибка апроксимації функції методом найменших квадратів представлена на рис. 5, похибка отриманого ядра (після диференціювання $f(t_1, t_2)$) представлена на рис. 6. Також розглянуто випадок побудови ядра при наявності адитивного білого Гаусівського шуму в 80 дБ у вихідному сигналі. Отримані похибки представлені на рис. 7–8.

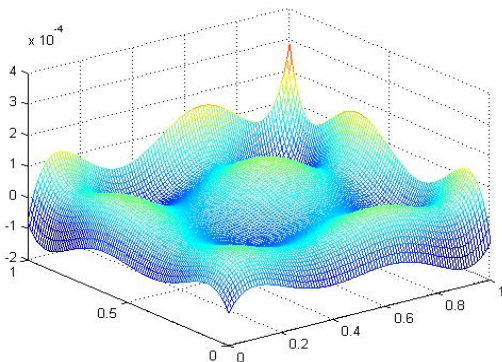


Рис. 5. Похибка апроксимації функції $f(t_1, t_2)$

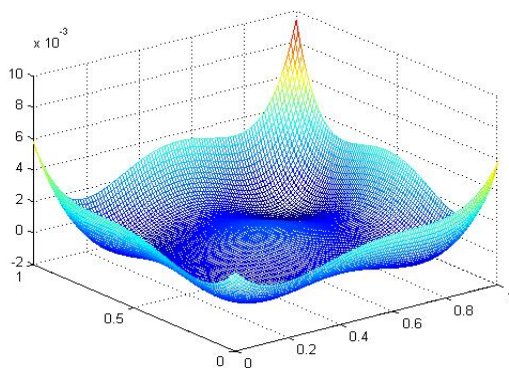


Рис. 6. Похибка апроксимації функції $\frac{\partial^2 f(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$

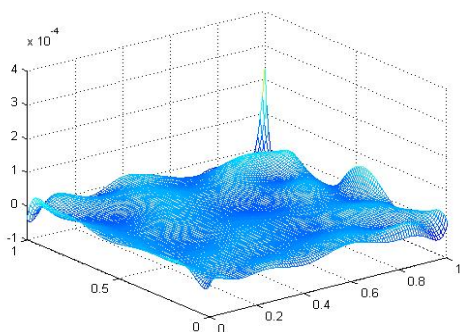


Рис. 7. Похибка апроксимації функції $f(t_1, t_2)$ із шумом

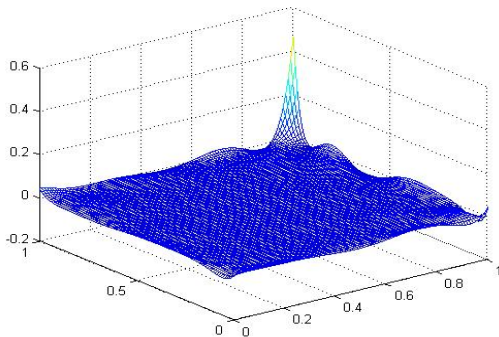


Рис. 8. Похибка апроксимації функції $\frac{\partial^2 f(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ із шумом

Висновки. Обчислювальні експерименти показали, що розглянутий алгоритм дозволяє виконувати апроксимацію функцій багатьох змінних заданих таблично та отримувати аналітичний вигляд ядер Вольтерри, застосування аналітичного диференціювання забезпечує стійкість до наявності шумів в експериментальних даних.

Список використаних джерел:

1. Бойко И. Ф. Идентификация систем измерений / И. Ф. Бойко, В. В. Турчак // *Електроніка та системи упр.* — 2009. — № 1. — С. 11–19.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков // *Бином. Лаборатория знаний.* — 2003. — 640 с.
3. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтерра ; пер. с англ. ; под ред. П. И. Кузнецова. — М. : Наука, 1982. — 304 с.
4. Іванюк В. А. Комп'ютерна реалізація детермінованого способу ідентифікації інтегральних моделей нелінійних динамічних об'єктів / В. А. Іванюк, В. В. Понеділок, В. А. Гришук // *Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: Технічні науки.* — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 59–67.
5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран ; пер. с франц. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
6. Павленко В. Д. Идентификация нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерры на основе данных измерений импульсных откликов / В. Д. Павленко // *Електронне моделювання.* — 2010. — Т. 32. — № 3. — С. 3–18.

The method of least squares approximation of functions of several variables. An algorithm for constructing mathematical models in the form of integral Volterra series based on experimental data. Investigated by means of numerical experiments developed quality software.

Key words: *approximation, the function of many variables, the method of least squares, Matlab / Simulink.*

Отримано: 23.07.2014