6. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 542 с.
7. Павленко В. Д. Методы детерминированной идентификации нелинейных систем в виде моделей Вольтерра / В. Д. Павленко, С. В. Павленко // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014: Труды. [Электронный ресурс]. — М. : Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. — С. 2830–2841.
8. Павленко С. В. Применение вейвлет-фильтрации в процедуре идентификации нелинейных систем на основе моделей Вольтерра // Восточно-европейский журнал передовых технологий. — Харьков, 2010. — № 6/4 (48). — С. 65–70.
9. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н. К. Смоленцев. — М. : ДМК Пресс, 2005. — 304 с.

The theoretical substantiation identification method of nonlinear dynamic systems based on approximation Volterra model using multisteps test signals, taking into account the measurement error responses. To ensure numerical stability identification method used regularization method and procedures for noise reduction based on wavelet transformation. Investigated the effectiveness of computational algorithms that implement identification method.

Key words: *nonlinear dynamic system, approximation model, Volterra series, Volterra kernel, identification, multisteps test signals.*

Отримано: 10.09.2014

УДК 519.711.3:621.311.243

В. І. Мороз, д-р техн. наук, професор,
М. І. Сольський, магістр

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ВПЛИВ МЕТОДІВ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ НА РЕАЛІЗАЦІЮ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ З ОБМЕЖЕНОЮ РОЗРЯДНІСТЮ

У статті здійснено аналіз впливу методів дискретизації передатних функцій на синтез і практичну реалізацію цифрових систем керування з обмеженою розрядністю.

Ключові слова: *передатна функція, цифрова система керування, метод дискретизації.*

Постановка проблеми. Ефективність використання цифрових систем керування в електромеханіці полягає в тому, що дані системи забезпечують високу точність, універсальність і можливість реалізації складних алгоритмів керування. Саме цифрові керуючі системи є найбільш перспективним з точки зору експлуатаційних, енергетичних, динамічних характеристик, що необхідні для функціонування певного технологічного комплексу. У зв'язку з цим важливим є дослідження всіх впливів, що можуть спричинити їх некоректну роботу.

Потрібно відзначити, що однією з малодосліджених проблем у цифрових системах керування є вплив на їх поведінку обмеженої розрядності апаратної частини.

Суть даної проблеми полягає у тому, що у випадку зменшення кроку дискретизації цифрова система керування теоретично мала б наближатися за своєю поведінкою до неперервного прототипу. Проте, наявність у системі обмеженої розрядності апаратної частини при задаванні коефіцієнтів дискретної передатної функції призводить до інших, неочікуваних наслідків — зменшення періоду дискретизації викликає відхилення у поведінці отриманої цифрової системи порівняно з неперервним прототипом [1].

Задачею досліджень є аналіз впливу методів дискретизації передатних функцій на поведінку цифрових систем керування з обмеженою розрядністю, що здійснюється з метою пошуку шляхів вирішення проблеми впливу обмеженої розрядності даних на практичну реалізацію цифрових систем керування.

Аналіз досліджень і публікацій. Пояснення явища відхилення у поведінці цифрової системи порівняно з неперервним прототипом можна отримати з робіт [2–4], в яких показано, що поліноми з кратними чи близькими коренями є дуже чутливими до похибок у задаванні коефіцієнтів поліномів. Як наслідок, у цифрових системах керування зменшення кроку дискретизації призводить до переміщення всіх нулів і полюсів їхньої дискретної передатної функції до одиниці — тобто, всі корені поліномів чисельника і знаменника стають дуже близькими, внаслідок чого поліноми стають погано обумовленими і, як результат, чутливими до точності задавання коефіцієнтів.

У роботі [1] показано, що для зменшення впливу обмеженої розрядності даних у цифрових системах необхідно використовувати подання дискретної передавальної функції системи у формі нулів і полюсів. Також встановлено залежність між розрядністю апаратної частини цифрових систем та мінімально допустимим з умов реалізації кроком дискретизації. Показано, що у цифрових системах з обмеженою розрядністю існує мінімальний крок дискретизації, для якого виконується умова стійкості дискретної системи [5].

У випадку, коли необхідно знайти наближене значення кореня поліному будь-яким числовим методом, спочатку потрібно дати оцінку точності розрахунків — кількості значущих цифр проміжних результатів для гарантованої достовірності отриманих результатів.

Принциповим результатом є теорема про неперервну залежність коренів поліному від його коефіцієнтів — число дійсних коренів не зміниться за малих варіацій його коефіцієнтів. Як наслідок, дійсний корінь поліному з дійсними коефіцієнтами не може «зійти» з дійсної осі, поки не зіткнеться з іншим дійсним коренем, тобто не стане кратним [6].

Незважаючи на вищезазначені рекомендації, проблема впливу обмеженої розрядності даних, яка значною мірою впливає на синтез і практичну реалізацію цифрових систем, остаточно не вирішена і потребує подальших досліджень з точки зору як теорії синтезу цифрових систем, так і з точки зору прикладної математики.

Теоретичні відомості. Синтез цифрових систем керування, як правило, базується на дискретизації неперервного прототипу [7; 8]. Найпопулярнішими методами дискретизації під час синтезу цифрових систем керування є:

- підстановка Тастіна (Tustin's method);
- метод відповідності нулів та полюсів (the correspondence of zeroes and poles);
- використання фіксатора нульового/першого порядку (Zero-Order Hold — ZOH, First-Order Hold — FOH).

Потрібно відзначити, що використання даних методів дає змогу отримати прості ефективні реалізації цифрових систем керування.

Експериментальні дослідження. Метою проведених досліджень було вивчення впливу вищезазначених методів дискретизації передатних функцій на синтез і практичну реалізацію цифрових систем керування на пристроях з обмеженою розрядністю.

Об'єктом досліджень був вибраний доволі простий тестовий динамічний об'єкт з двома парами комплексно-спряжених полюсів:

$$p_{1,2} = 1 \pm j;$$
$$p_{3,4} = 3 \pm 3j,$$

результуюча передатна функція якого має вигляд:

$$W(s) = \frac{36}{s^4 + 8s^3 + 32s^2 + 48s + 36}.$$

Спрощенню задачі аналізу сприяє використання основної теореми алгебри (відомої також як теорема розкладення Хевісайда) — будь-яку правильну дробово-раціональну функцію (у нашому випадку — передатну функцію) можна розкласти на елементарні складові не вище другого порядку (відповідають нульовим і дійсним полюсам та парам комплексно-спряжених полюсів).

Подальші дослідження проводились двома способами:

1) без розкладання неперервної передатної функції на елементарні складові (без використання декомпозиції);
2) з використанням розкладання неперервної передатної функції на елементарні складові (з використанням декомпозиції).

На першому етапі відповідні дискретні передатні функції досліджуваних цифрових систем були синтезовані згаданими методами без використання декомпозиції неперервної передатної функції (наприклад, використанням математичного застосунку Mathcad чи засобів Control Systems Toolbox середовища MATLAB) і, відповідно, мають такий вигляд (коефіцієнти передатних функцій залежать від кроку та застосованого методу дискретизації):

- отримана підстановкою Тастіна $\frac{1}{s} = \frac{2}{\tau}\frac{z+1}{z-1}$ дискретна передатна функція як відношення поліномів чисельника і знаменника:

$$W_a(z) = \frac{b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0};$$

- отримана методом відображення нулів/полюсів дискретна передатна функція як відношення поліномів чисельника і знаменника:

$$W_b(z) = \frac{K_d^* z^2}{z^4 + a_3^* z^3 + a_2^* z^2 + a_1^* z + a_0^*};$$

- отримана методом використання фіксатора нульового порядку дискретна передатна функція:

$$W_c(z) = \frac{b_3' z^3 + b_2' z^2 + b_1' z + b_0'}{z^4 + a_3' z^3 + a_2' z^2 + a_1' z + a_0'};$$

- отримана методом використання фіксатора першого порядку дискретна передатна функція:

$$W_d(z) = \frac{b_4^\circ z^4 + b_3^\circ z^3 + b_2^\circ z^2 + b_1^\circ z + b_0^\circ}{z^4 + a_3^\circ z^3 + a_2^\circ z^2 + a_1^\circ z + a_0^\circ}.$$

Аналіз поведінки отриманих цифрових систем досліджувався для кроків дискретизації $\tau = 1$; 0.3; 0.1; 0.03; 0.01 с. Інструментом для досліджень було середовище імітаційного моделювання Simulink математичного застосунку MATLAB.

Комп'ютерна модель досліджень без декомпозиції неперервної передатної функції на елементарні складові у середовищі MATLAB показана на рис. 1. Потрібно відзначити, що у дослідженнях коефіцієнти поліномів чисельника і знаменника дискретних передатних функцій записувалися з точністю чотирьох десяткових цифр.

Відповідно до результатів експерименту при представленні дискретної передатної функції цифрової системи керування класичною передатною функцією без використання декомпозиції при кроці дискретизації $\tau = 1$; 0.3 с система керування є стійкою (рис. 2), а при кроці дискретизації меншому за 0.1 с система керування стає нестійкою (рис. 3, 4).

Таким чином, у випадку задавання коефіцієнтів дискретних передатних функцій чотирма десятковими цифрами для забезпечення працездатності досліджуваної цифрової системи керування, синтезованої вищезгаданими методами без розкладу неперервної передатної функції на елементарні складові, крок дискретизації повинен бути більшим за 0.1 с.

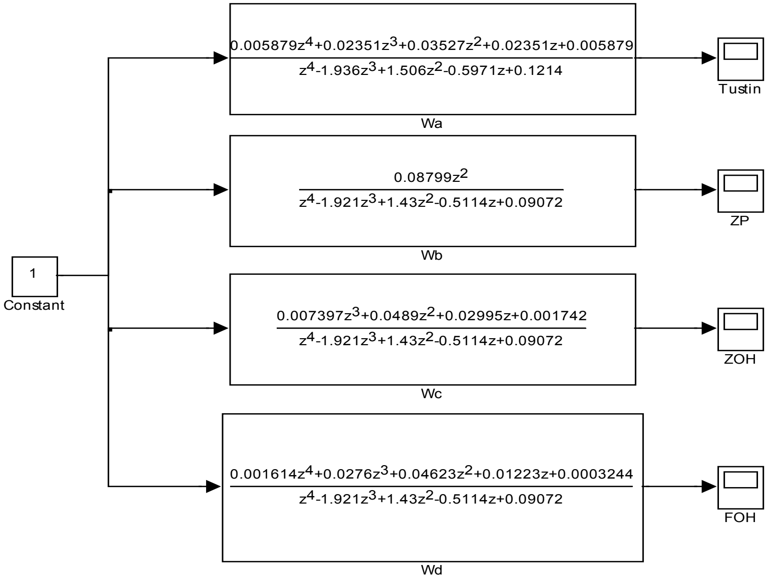

Рис. 1. *Комп'ютерна модель досліджень без декомпозиції неперервної передатної функції на елементарні складові*

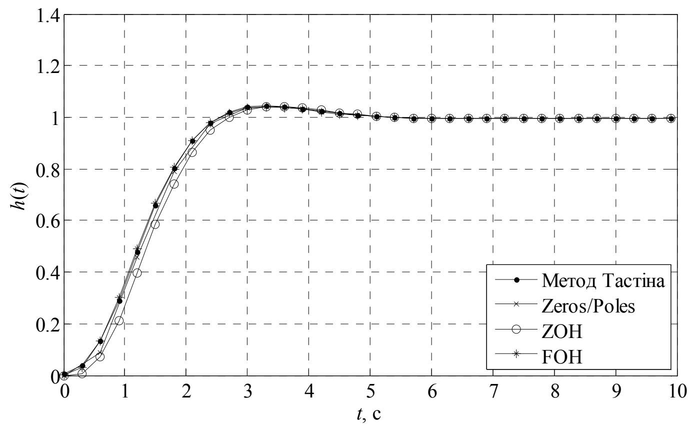

Рис. 2. *Перехідні характеристики цифрових систем без декомпозиції неперервної передатної функції на елементарні складові при $\tau = 0.3$ с*

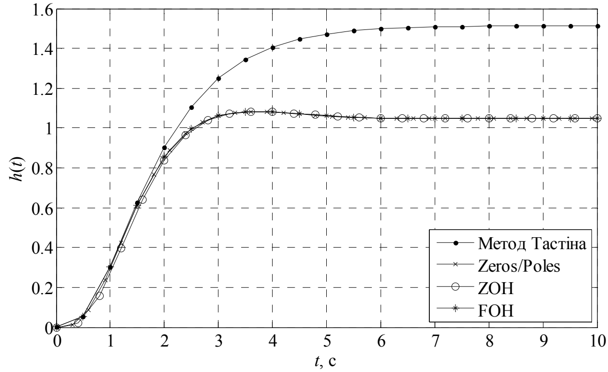

Рис. 3. *Перехідні характеристики цифрових систем без декомпозиції неперервної передатної функції на елементарні складові при τ = 0.1 с*

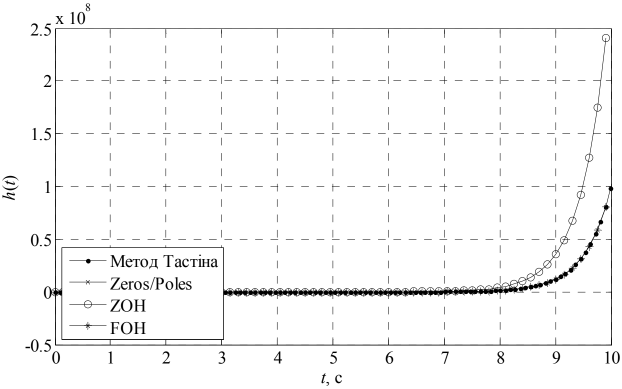

Рис. 4. *Перехідні характеристики цифрових систем без декомпозиції неперервної передатної функції на елементарні складові при τ = 0.03 с*

Відповідні дискретні передатні функції досліджуваної системи були синтезовані згаданими методами також і з використанням декомпозиції неперервної передатної функції (коефіцієнти поданих передатних функцій залежать від кроку та застосованого методу дискретизації):

- отримана підстановкою Тастіна дискретна передатна функція:

$$W_a(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} + \frac{c_2 z^2 + c_1 z + c_0}{z^2 + d_1 z + d_0};$$

- отримана методом відображення нулів/полюсів дискретна передатна функція:

$$W_b(z) = \frac{b_1^* z + b_0^*}{z^2 + a_1^* z + a_0^*} + \frac{c_1^* z + c_0^*}{z^2 + d_1^* z + d_0^*};$$

- отримана методом використання фіксатора нульового порядку дискретна передатна функція:

$$W_b(z) = \frac{b_2' z^2 + b_1' z + b_0'}{z^2 + a_1' z + a_0'} + \frac{c_2' z^2 + c_1' z + c_0'}{z^2 + d_1' z + d_0'};$$

- отримана методом використання фіксатора першого порядку дискретна передатна функція:

$$W_d(z) = \frac{b_2^{\circ} z^2 + b_1^{\circ} z + b_0^{\circ}}{z^2 + a_1^{\circ} z + a_0^{\circ}} + \frac{c_2^{\circ} z^2 + c_1^{\circ} z + c_0^{\circ}}{z^2 + d_1^{\circ} z + d_0^{\circ}}.$$

Аналіз поведінки отриманих цифрових систем досліджувався для кроків дискретизації τ = 1; 0.3; 0.1; 0.03; 0.01; 0.003 с. Комп'ютерна модель досліджень з використанням розкладу неперервної передатної функції на елементарні складові у середовищі MATLAB показана на рис. 5.

При представленні дискретної передатної функції досліджуваної системи класичною передатною функцією з 4-значною точністю коефіцієнтів і використанням розкладу неперервної передатної функції на елементарні складові при кроках дискретизації τ = 1; 0.3 с отримані цифрові системи є стійкими.

Завдяки використанню декомпозиції неперервної системи при кроках дискретизації τ = 0.03; 0,01 с дискретні системи також залишаються стійкими (рис. 6, 7), проте у випадку подальшого зменшення кроку дискретизації при τ = 0.003 с цифрові системи, синтезовані згаданими методами з використання декомпозиції неперервної передатної функції, стають вже нестійкими (рис. 8).

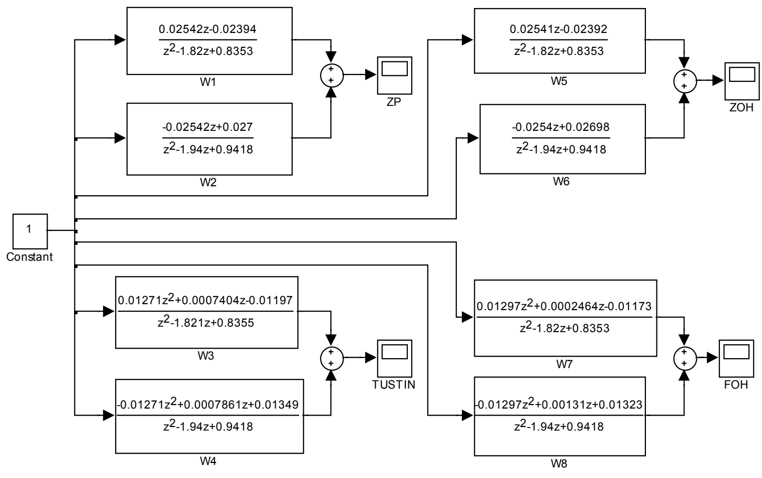

Рис. 5. *Комп'ютерна модель досліджень з використанням розкладу неперервної передатної функції на елементарні складові*

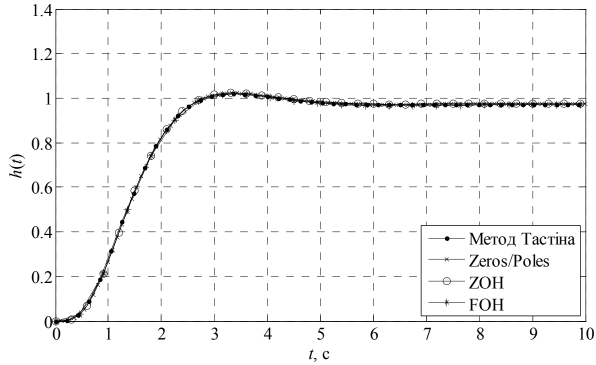

Рис. 6. *Перехідні характеристики цифрових систем з використанням розкладу неперервної передатної функції на елементарні складові при* $\tau = 0.03$ *с*

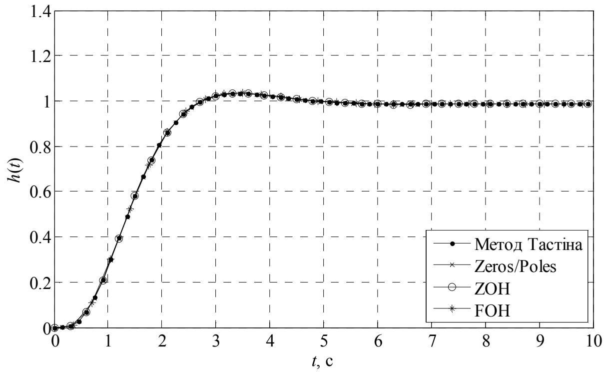

Рис. 7. *Перехідні характеристики цифрових систем з використанням розкладу неперервної передатної функції на елементарні складові при* $\tau = 0.01$ *с*

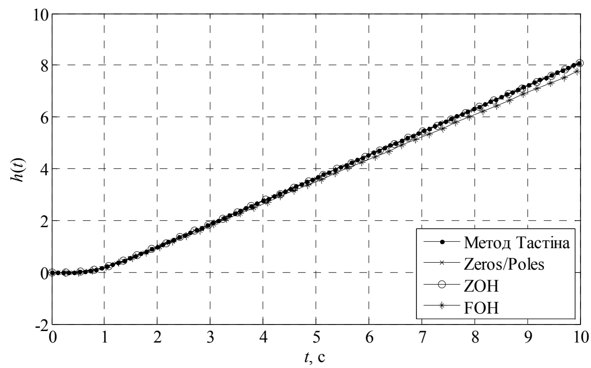

Рис. 8. *Перехідні характеристики цифрових систем з використанням розкладу неперервної передатної функції на елементарні складові при* $\tau = 0.003$ *с*

Висновки. Аналіз впливу методів дискретизації передатних функцій на поведінку цифрових систем керування з обмеженою розрядністю підтвердив важливість досліджень проблеми впливу обмеженої розрядності апаратної частини на практичну реалізацію цифрових систем керування.

У результаті проведених досліджень встановлено, що використання декомпозиції неперервної передатної функції на елементарні складові з подальшим синтезом на їх основі цифрових систем керування дає змогу зменшити вплив обмеженої розрядності апаратної частини та дає змогу розширити межі допустимих для стабільної роботи цифрових систем кроків дискретизації.

Список використаних джерел:

1. Moroz V. The investigation of the influence of data finite precision on realization of digital control systems / V. Moroz, M. Solskyi // Computational problems of electrical engineering. — 2013. — Vol. 3, № 1. — P. 69–74.
2. McCracken D. D. Numerical methods and FORTRAN programming: with applications in engineering and science / D. D. McCracken, W. S. Dorn. — Wiley, 1964. — 457 p.
3. Forsythe G. E. Computer Methods for Mathematical Computations / G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler. — New Jersey : Prentice Hall, Inc., 1977. — 259 p.
4. Moler C. Numerical Computing with MATLAB. — Access mode: http://www.mathworks.com/moler/chapters.html.
5. Мороз В. І. Умови реалізації цифрових регуляторів на цифрових системах з обмеженою розрядністю / В. І. Мороз, М. І. Сольський, І. Р. Головач // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Тематичний випуск «Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика». — Харків : НТУ «ХПІ», 2013. — № 36. — С. 313–314.
6. Локализация корней полинома. Классические формы преподавания математики и ее приложений на основе современных информационно-компьютерных технологий. [Електронний ресурс]. — Режим доступа: http:// http://pmpu.ru/vf4/polynomial/zero_local.
7. Isermann R. Digital Control Systems / R. Isermann. — Springer-Verlag, 1981. — 566 p.
8. Kuo B. C. Digital Control Systems / B. C. Kuo. — Oxford University Press, 1992. — 751 p.

The influence of using popular sampling methods of discrete transfer function on the behavior of digital control systems with data finite precision was analyzed.

Key words: *transfer function, digital control system, sampling method.*

Отримано: 15.07.2014