

УДК 681.3

Б. Б. Нестеренко, д-р. техн. наук, професор,
М. А. Новогарський, д-р. техн. наук

Інститут математики НАН України, м. Київ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРИСТАЛЬТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ РЕШІТЧАСТОГО РІВНЯННЯ БОЛЬЦМАНА

Обґрунтовано актуальність дослідження перистальтичних процесів, які забезпечують переміщення рідин в організмі людини. Оскільки традиційний підхід до математичного моделювання реальних перистальтичних процесів викликає ряд проблем, пов'язаних зі значним зростанням обсягів обчислень та порушенням законів збереження, в роботі запропоновано застосування технології математичного моделювання на основі решітчастого рівняння Больцмана. Описані теоретичні основи решітчастої моделі Больцмана та особливості її застосування на двовимірній решітці. Значна увага приділена особливостям формування граничних умов на макроскопічному рівні та рівні вузлів решітки. Наведено результати моделювання перистальтичного процесу у травному тракті людини.

Ключові слова: *решітчасте рівняння Больцмана, математичне моделювання, перистальтичний процес, BGK-модель.*

Вступ. Бурхливий науково-технічний прогрес в області технічних засобів та програмного забезпечення обчислювальних систем відкриває нові можливості для розвитку методів математичного моделювання складних фізичних процесів, зокрема процесів переміщення рідин в обмежених областях з рухомими границями, тобто перистальтичних процесів [1; 2]. Ці процеси є важливою складовою переважної більшості механізмів забезпечення руху рідин в організмі людини. Перистальтичні процеси відбуваються у таких важливих системах, як травна та судинна. Тому вивчення руху рідин під дією перистальтичних процесів у згаданих системах дозволяє краще зрозуміти механізми їх функціонування з метою корекції тих чи інших відхилень.

Сучасні математичні моделі перистальтичних процесів у більшості випадків представлені системою рівнянь, до якої входить рівняння Нав'є-Стокса та рівняння неперервності потоку [3]. Крайові задачі, сформовані на основі даної системи рівнянь, потребують значних затрат часу та обчислювальних ресурсів для їх розв'язування. Основні причини високої обчислювальної складності полягають у необхідності врахування зміни у часі геометричної форми фізичної області, що відбувається за рахунок коливань границь обмежуючого об'єкта, та висо-

кій мінливості параметрів фізичних процесів, характерній для більшості біологічних об'єктів. За умови використання коливань границь в області складної форми виникає також проблема стійкості чисельних методів, вирішення якої неминуче призводить до зменшення адекватності математичної моделі. Негативний вплив на адекватність моделі мають також порушення законів збереження, що виникають внаслідок використання наближених обчислень. Очевидно, що вони стають особливо відчутними при розгляді крайових задач на значних відрізках часу. З цього приводу в літературі часто наводять приклад щодо маленького протікання, яке може через певний час осушити океан.

Вказані проблеми стали причиною активного пошуку альтернативних підходів, одним з яких є кліткові автомати решітчастого газу (КАРГ), теорія яких почала активно розвиватися ще у 80-х роках минулого століття [4]. Подібно до чисельних методів, КАРГ розглядають досліджувану область у вигляді решітки з граничними умовами у вузлах, що співпадають з границями області. Корінною відмінністю є те, що в даному випадку приймається стратегія «знизу-вверх», яка забезпечує відповідність законам збереження для досліджуваних фізичних величин на мікрорівні, тобто у кожному вузлі решітки. Основною проблемою такого підходу довгий час залишалась розробка такої структури решітки та правил взаємодії елементарних об'ємів рідини в кожному вузлі, щоб на макрорівні поведінка моделі відповідала розв'язкам крайової задачі на основі рівняння Нав'є-Стокса. В процесі вирішення цієї проблеми було виявлено ряд недоліків КАРГ, важливим з яких є «зашумленість» результатів, яка може бути частково подолана шляхом збільшення обчислювальної складності відповідних алгоритмів [5]. Подальший розвиток КАРГ привів до розробки нового підходу, який спеціально орієнтований на вирішення гідродинамічних задач та успадкував істотну частину переваг кліткових автоматів решітчастого газу. Цей підхід ґрунтується на розв'язуванні решітчастого рівняння Больцмана у кожному вузлі решітки і тому має назву решітчастої моделі Больцмана (РМБ).

1. Основи решітчастої моделі Больцмана. В основі решітчастої моделі лежить рівняння Больцмана, яке є рівнянням з частинними похідними, що описує еволюцію функції розподілу певної частинки речовини або елементарного об'єму рідини на мезоскопічному рівні [6].

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = \Omega(f), \quad (1)$$

де F — зовнішні сили, що діють на частинку масою m , $\Omega(f)$ — оператор колізій, $f(x, v, t)$ — функція розподілу густини, яка задає ймовірність того, що частинка в момент часу t перебуватиме в кубі з вершиною в точці x і довжиною сторони dx , а її швидкість буде знаходитися в діапазоні від v до dv .

За умови відсутності зовнішніх сил ($F = 0$) одержуємо

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \nabla f = \Omega(f). \quad (2)$$

Завдяки простоті найчастіше використовують оператор колізій, що представлений виразом:

$$\Omega(f) = \frac{1}{\tau} (f - f^{(eq)}), \quad (3)$$

де τ — константа, яка визначає масштаб часу, необхідний для встановлення локальної рівноваги, $f^{(eq)}$ — рівноважна функція розподілу густини (так звана функція розподілу Максвелла-Больцмана).

Таким чином одержуємо BGK-модель, назву якої складають перші літери прізвищ її авторів [7]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \nabla f = \frac{1}{\tau} (f - f^{(eq)}). \quad (4)$$

Мезоскопічний та макроскопічний рівні моделювання пов'язані виразами:

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) dv = \sum_{k=0}^8 f_i = \sum_{k=0}^8 f_k^{(eq)}, \quad (5)$$

$$u = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} v \cdot f(x, v, t) dv = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^8 v_k f_k = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^8 v_k f_k^{(eq)}, \quad (6)$$

де u — вектор швидкості потоку рідини, ρ — масова густина потоку рідини.

Дискретизацію цієї моделі виконують в просторі швидкостей на скінченній множині векторів $\{v_k\}$ з урахуванням законів збереження [8], в результаті чого одержуємо систему, яка складається з Q рівнянь:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + v_k \nabla f_k = \frac{1}{\tau} (f_k - f_k^{(eq)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, Q-1, \quad (7)$$

де $f_k(x, t) = f(x, v_k, t)$ є функція розподілу густини, яка асоційована з напрямком вектора швидкості v_k , $f_k^{(eq)}$ — відповідна вектору v_k рівноважна функція розподілу густини.

Рівняння (7) є основою решітчастої моделі Больцмана, оскільки після застосування до елементарних об'ємів рідини на мезоскопічному рівні забезпечує опис її поведінки відповідно до рівняння Нав'є-Стокса на макроскопічному рівні.

Для реалізації комп'ютерної моделі виконаємо повну дискретизацію (7) з часовим кроком Δt та просторовим кроком $\Delta x_k = v_k \Delta t$ [9]:

$$\frac{f_k(x_k + v_k \Delta t, t + \Delta t) - f_k(x_k + v_k \Delta t, t)}{\Delta t} + \frac{f_k(x_k + v_k \Delta t, t) - f_k(x_k, t)}{\Delta x_k} = - \frac{f_k(x_k, t) - f_k^{(eq)}(x_k, t)}{\tau}$$

Вважаючи, що $\Delta x_k = \Delta t = 1$, одержуємо решітчасте рівняння Больцмана:

$$f_k(x_k + v_k \Delta t, t + \Delta t) - f_k(x_k, t) = - \frac{1}{\tau} \left(f_k(x_k, t) - f_k^{(eq)}(x_k, t) \right), \quad (8)$$

де x_k — точка в дискретизованому фізичному просторі.

Рівняння (8) відповідно до BGK-моделі будемо розв'язувати за два кроки.

1. Колізійний крок:

$$\tilde{f}_k(x_k, t + \Delta t) = f_k(x_k, t) - \frac{1}{\tau} \left(f_k(x_k, t) - f_k^{(eq)}(x_k, t) \right). \quad (9)$$

2. Потоківий крок:

$$f_k(x_k + v_k \Delta t, t + \Delta t) = \tilde{f}_k(x_k, t + \Delta t). \quad (10)$$

В (9) і (10) функція розподілу \tilde{f}_k описує післяколізійний стан елементарного об'єму рідини або частинки речовини в точці дискретного простору x_k . В BGK-моделі колізії розглядаються як коливання елементарних об'ємів рідини навколо локальної рівноваги.

Значення елементів множини $\{v_k\}$ визначаються в залежності від вимірності моделі та кількості зв'язаних вузлів, які утворюють базовий елемент решітки. Серед двовимірних моделей відомі моделі D2Q5, D2Q7 та D2Q9 з базовими елементами, що показані на рис. 1.

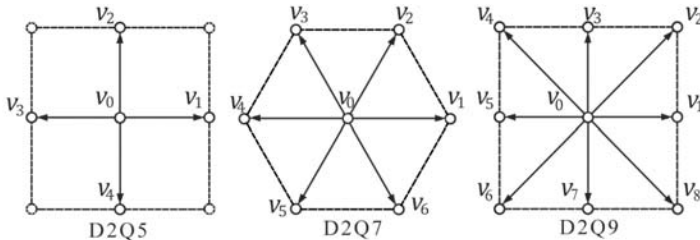


Рис. 1. Базові елементи двовимірних решітчастих моделей Больцмана

2. Параметри двовимірної моделі D2Q9 для нестисливої рідини. Для моделювання двовимірних потоків нестисливої рідини використаємо решітчасту модель D2Q9, для якої складові вектора швидкості $v = \{v_k\}_{k=0}^8$ визначають з виразів [10]:

$$v_k = \begin{cases} (0,0), & k = 0, \\ c \left(\cos \left(\frac{\pi(k-1)}{4} \right), \sin \left[\frac{\pi(k-1)}{4} \right] \right), & k = 1, 3, 5, 7, \\ \sqrt{2}c \left(\cos \left[\frac{\pi(k-1)}{4} \right], \sin \left[\frac{\pi(k-1)}{4} \right] \right), & k = 2, 4, 6, 8, \end{cases} \quad (11)$$

де $c = \Delta x / \Delta t$ — константа решітки, яка дорівнює відношенню величини просторового кроку Δx до величини часового кроку Δt .

На заданій D2Q9 решітці використаємо функцію розподілу Максвелла з метою визначення рівноважної функції розподілу густини $f_k^{(eq)}$. Для невеликих значень числа Маха $M \approx |u|/c_s \ll 1$, яке визначатимемо як відношення модуля швидкості потоку $|u|$ до швидкості звуку c_s в даній рідині, одержимо:

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{3\rho}{2\pi} e^{-\frac{3}{2}(v_k \cdot u)^2} = \frac{3\rho}{2\pi} e^{-\frac{3v_k^2}{2}} e^{\frac{3}{2}(v_k \cdot u - u \cdot u)} \approx \\ &\approx \frac{3\rho}{2\pi} e^{-\frac{3v_k^2}{2}} \left[1 + 3 \frac{(v_k \cdot u)}{c^2} - \frac{3}{2} \frac{(u \cdot u)}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(v_k \cdot u)^2}{c^4} \right]. \end{aligned}$$

Отже, обмежившись точністю розкладання $O(M^2)$, що відповідає порядку рівняння Нав'є-Стокса, вираз для рівноважної функції розподілу густини запишемо у вигляді:

$$f_k^{(eq)} = \rho w_k \left[1 + 3 \frac{(v_k \cdot u)}{c^2} - \frac{3}{2} \frac{(u \cdot u)}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(v_k \cdot u)^2}{c^4} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, 8, \quad (12)$$

де $w_k = \begin{cases} 4/9, & k = 0 \\ 1/9, & k = 1, 3, 5, 7 \\ 1/36, & k = 2, 4, 6, 8 \end{cases}$ — вагові коефіцієнти, які залежать від

положення вузла k відносно центрального вузла. Максимального значення коефіцієнт w_k набуває при $k = 0$, а мінімальне значення відповідає найвіддаленішим вузлам з номерами 2, 4, 6 та 8, відповідно до рис. 1. Значення коефіцієнтів w_k сформовані з дотриманням

умови нормалізації: $\sum_{k=0}^8 w_k = 1$.

Оскільки при розв'язуванні рівняння Нав'є-Стокса для несстискуваних рідин прийнято використовувати тиск p в якості незалежної

змінної, введемо запропоновану в [8] функцію розподілу тиску $p_k \equiv c_s^2 f_k$. Тоді рівняння (8) перепишемо у вигляді:

$$p_k(x_k + v_k \Delta t, t + \Delta t) - p_k(x_k, t) = -\frac{1}{\tau} \left(p_k(x_k, t) - p_k^{(eq)}(x_k, t) \right), \quad (13)$$

де $p_k^{(eq)}$ — рівноважна функція розподілу тиску, яка визначається з (12) за умови, що для решітки D2Q9 $c_s = c/\sqrt{3}$:

$$p_k^{(eq)} = c_s^2 f_k^{(eq)} = \rho w_k \left[\frac{c^2}{3} + (v_k \cdot u) - \frac{(u \cdot u)}{2} + \frac{3c^2}{2} (v_k \cdot u)^2 \right]. \quad (14)$$

Відповідно до виразів (5) і (6) макроскопічні параметри потоку з використанням функції розподілу тиску мають вигляд:

$$p = \sum_{k=0}^8 p_k, \quad (15)$$

$$u = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^8 v_k p_k. \quad (16)$$

Математична модель (13–16), що описує рух елементарних об'ємів рідини на мезоскопічному рівні, відповідає системі, яка складається з рівнянь неперервності потоку та Нав'є-Стокса на макроскопічному рівні:

$$\begin{cases} \nabla u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \cdot u) = -\nabla p + \nu \nabla^2 u, \end{cases} \quad (17)$$

де ν — кінематична в'язкість, яка визначається з виразу:

$$\nu = \frac{(2\tau - 1) (\Delta x)^2}{6 \Delta t}.$$

Доведення цього факту вперше запропоновано Чапменом-Енскогом та узагальнено в [11].

3. Граничні умови. Особливість формування граничних умов при моделюванні перистальтичних процесів в біологічних об'єктах зумовлена тим, що причиною руху рідини в порожнистому об'єкті є коливальний рух його стінок. Тому на макроскопічному рівні під час моделювання граничні умови повинні задавати вектор швидкості руху елементарного об'єму рідини у безпосередній близькості до обмежуючої поверхні при повній відсутності ковзання вздовж поверхні.

Стінки поверхні (рис. 2) рухаються зі швидкістю, напрям вектора якої збігається з нормаллю до осі x , а величина модуля визначається функцією:

$$U_n(t, x, \delta, \varphi, \lambda, \gamma) = U_{\max} \cdot U_t(t, \lambda) \cdot U_x(x, \delta, \varphi, \lambda), \quad (18)$$

де U_{\max} — величина максимально допустимого значення модуля швидкості, λ — часовий період зміни швидкості деформації, φ — просторовий період деформації вздовж осі x , δ — поточний номер просторового кроку, γ — величина зсуву деформації вздовж осі x .

Часова складова зміни модуля швидкості визначається з виразу:

$$U_t(t, \lambda) = \sin^2\left(\frac{\pi t}{\lambda}\right). \text{ Повний цикл коливання поверхні відбувається}$$

за два періоди даної функції.

Просторова складова зміни модуля швидкості залежить від стадії процесу моделювання і представлена функцією:

$$U_x(x, \delta, \varphi, \gamma) = \begin{cases} \cos(\pi x/\varphi) & \text{при } \delta = 0, \\ -\cos(\pi x/\varphi - \delta\gamma) + \cos(\pi x/\varphi - (\delta + 1)\gamma) & \text{при } 0 < \delta < \delta_{\max}, \\ -\cos(\pi x/\varphi - \delta\gamma) & \text{при } \delta = \delta_{\max}. \end{cases} \quad (19)$$

На першому кроці відбувається початкова деформація поверхні, наступні кроки моделювання відображають зменшення деформації попереднього кроку з одночасним зростанням деформації, яка відповідає наступному крокові. На останньому кроці δ_{\max} відбувається перехід обмежуючої поверхні до початкового стану.

Зміна положення обмежуючої поверхні на макроскопічному рівні супроводжується зміною статусу вузлів решітки. Вузол одержує статус граничного, якщо фізична границя проходить через зону впливу даного вузла. Якщо зона впливу вузла лежить за межами фізичної границі, то такий вузол вважають вузлом стінки або вузлом рідини за умови, що зона його впливу повністю належить рідині. Зона впливу кожного вузла представлена у вигляді квадрата, який проходить через середини ліній зв'язку між сусідніми вузлами (рис. 2). Таким чином одержуємо апроксимовану границю між рідиною та обмежуючою поверхнею, яка проходить через відповідні граничні вузли. Трансформація граничних умов макроскопічного рівня на рівень вузлів решітки Больцмана може бути реалізована шляхом довизначення функцій розподілу, які залишаються невідомими для зв'язків граничних вузлів, що з'єднують їх з вузлами стінки [12]. При такому довизначенні виходять з того факту, що в даних областях повинна підтримуватись термодинамічна рівновага, а тому в них має бути справедливим закон розподілу Максвела-Больцмана. Оскільки частина сусідів граничного вузла не належить рідині, то локальні функції розподілу, що передаються від них, залежать від тиску p' , який відрізняється від макроскопічного значення тиску p . Наприклад, для

вузла нижньої границі з координатами $(x, y) = (5, 3)$ відповідні фіктивні функції розподілу визначаються з виразу:

$$g_k = f_k^{(eq)}(p', u), \quad (20)$$

де $k = 2, 3, 4$ відповідно до нумерації, яка показана на рис. 2 для вузла з координатами $(x, y) = (8, 3)$; $f_k^{(eq)}$ — рівноважна функція розподілу, що визначається з виразу (12), $u = (u_x, u_y)$ — вектор швидкості, направлений по нормалі до границі.

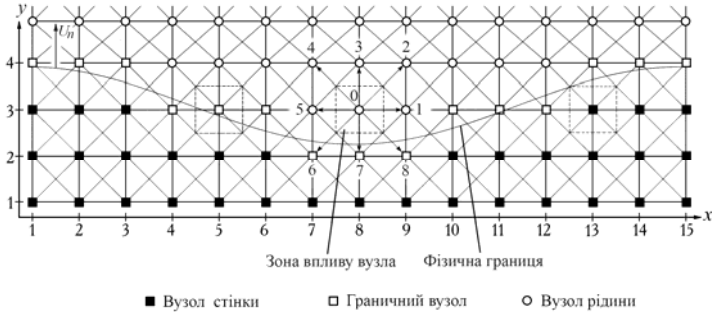


Рис. 2. Параметри області дослідження

Для визначення p' розглянемо рівняння (15) і (16), що задають зв'язок функцій розподілу з макроскопічними параметрами тиску та швидкості. Граничному вузлу $(5, 3)$ відповідає така система рівнянь:

$$\begin{cases} f_2 + f_3 + f_4 = p' - (f_0 + f_1 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8), \\ f_2 - f_4 = p'u_x - (f_1 - f_5 - f_6 + f_8), \\ f_2 + f_3 + f_4 = p'u_y + (f_6 + f_7 + f_8). \end{cases} \quad (21)$$

Розв'язавши її відносно p' , одержуємо:

$$p' = \frac{f_0 + f_1 + f_5 + 2(f_6 + f_7 + f_8)}{1 - u_y}. \quad (22)$$

Якщо допустити, що нерівноважна складова функції розподілу є незмінною вздовж напрямку осі y , то $f_3 - f_3^{(eq)} = f_7 - f_7^{(eq)}$. Використовуючи (12), одержуємо:

$$\begin{aligned} f_3 &= f_7 + \frac{2p'u_y}{3}, \quad f_2 = f_6 - \frac{f_1 - f_5}{2} + \frac{p'u_x}{2} + \frac{p'u_y}{6}, \\ f_4 &= f_8 + \frac{f_1 - f_5}{2} - \frac{p'u_x}{2} + \frac{p'u_y}{6}. \end{aligned}$$

Використовуючи аналогічний підхід, можна одержати вирази для визначення функцій розподілу для вузлів верхньої границі, граничних вузлів вертикальних стінок та кутових граничних вузлів. При цьому значення модуля та напрям вектора u визначають, виходячи з середньої швидкості руху границі в зоні впливу відповідного граничного вузла.

4. Застосування моделі D2Q9 при дослідженні перистальтичних процесів. Двовимірний решітчаста модель Больцмана застосована у дослідженнях перистальтичних процесів при коригуючих операціях на порожнистих органах шлунково-кишкового тракту. Метою досліджень є пошук додаткових можливостей затримання вмісту тонкої кишки (хімусу) і розробка комплексу заходів, що включають зміну просторових форм прямої кишки та вплив на її моторику. Зокрема, на рис. 3 показано особливості просторового розподілу швидкостей хімусу в моделі паралельного розгалуження.

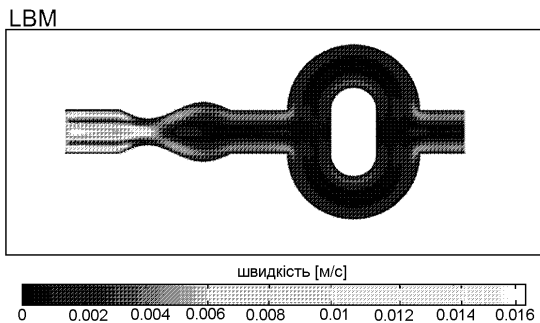


Рис. 3. Двовимірний модель паралельного розгалуження

Параметри перистальтичного процесу також істотно залежать від характеристик перекачуваної рідини. Оскільки параметри хімусу можуть змінюватись у залежності від його розміщення в шлунково-кишковому тракті, проведено ряд досліджень з метою визначення продуктивності перистальтичного процесу в паралельному розгалуженні в залежності від густини та динамічної в'язкості хімусу.

В результаті моделювання перистальтичного процесу при фіксованих значеннях швидкості деформації поверхні і різних значеннях густини хімусу одержано залежність, що показана на графіку (рис. 4).

Результати досліджень показали нелінійне зменшення продуктивності перистальтичного транспортного процесу зі зростанням густини хімусу, що добре узгоджується з результатами практичних досліджень. Паралельне розгалуження сприяє зменшенню нелінійності в робочому діапазоні густин від 400 до 800 кг/м^3 . При фіксованому значенні густини хімусу 500 кг/м^3 проведено моделювання з метою визначення впливу динамічної в'язкості хімусу на продуктивність перистальтичного транспортного процесу.

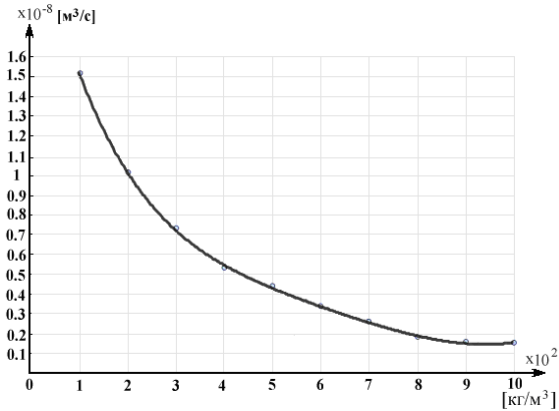


Рис. 4. Графік залежності продуктивності від густини химусу

В результаті цього дослідження одержана залежність, що показана на рис. 5.

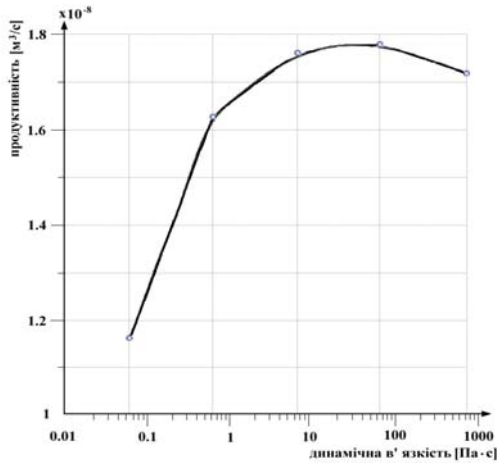


Рис. 5. Графік залежності продуктивності від динамічної в'язкості

Отже, як видно з рис. 5, продуктивність перистальтичного транспортного процесу зростає зі зростанням динамічної в'язкості химусу, досягає свого максимального значення при динамічній в'язкості 50 Па·с і починає зменшуватись при подальшому зростанні цього параметра. Використання залежностей, показаних на рис. 4 та рис. 5 є важливим при виборі типу реконструктивної операції.

Висновки. Традиційна технологія моделювання перистальтичних процесів базується на розв'язуванні чисельними методами крайової задачі математичної фізики, яка включає рівняння неперервності пото-

ку та рівняння Нав'є-Стокса. Але такий підхід пов'язаний зі значними труднощами, спричиненими великим обсягом обчислень, проблемами стійкості чисельних методів та загрозою порушення законів збереження. Для подолання згаданих труднощів при моделюванні перистальтичних процесів у біологічних об'єктах в роботі запропоновано використання технології моделювання «знизу-вверх». Ця технологія заснована на виконанні законів збереження і дозволяє значно простіше задавати граничні умови для областей зі змінною формою, що є важливим для перистальтичних процесів, у яких рух рідини спричинений рухом обмежуючих поверхонь. Основою моделювання за технологією «знизу-вверх» є КАРГ, основний недолік яких полягає у «зашумленості» результатів моделювання. Тому запропоновано використання решітчастого рівняння Больцмана, яке можна вважати подальшим розвитком технології «знизу-вверх» для задач гідродинаміки. Описано математичні основи формування решітчастого рівняння Больцмана та особливості застосування його до моделювання на двовимірних решітках типу D2Q9. Представлені правила формування граничних умов на макроскопічному рівні та на рівні вузлів даної двовимірної решітки. Наведено деякі результати математичного моделювання перистальтичних процесів, що виникають внаслідок коригуючих операцій на порожнистих органах травного тракту людини.

Список використаних джерел:

1. Tripathi D. Numerical and analytical simulation of peristaltic flows of generalized Oldroyd-B fluids / D. Tripathi // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2010. — Vol. 67, №12. — P. 1932–1943.
2. Akram S. Simulation of heat and mass transfer on peristaltic flow of hyperbolic tangent fluid in an asymmetric channel / S. Akram, S. Nadeem // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2012. — Vol. 70, №12. — P. 1475–1493.
3. Rast M.P. Simultaneous solution of the Navier-Stokes and elastic membrane equations by a finite element method / M.P. Rast // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2005. — Vol. 19, №12. — P. 1115–1135.
4. Binder P.M. Topological classification of cellular automata / P.M. Binder // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1991. — Vol. 24, №1. — L31–L34.
5. Frisch U. Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation / U. Frisch, B. Hasslacher, Y. Pomeau // *Physical Review Letters*. — 1986. — Vol. 56, №14. — P. 1505–1508.
6. Mohamad A.A. *Lattice Boltzmann method* / A.A. Mohamad. — London: Springer-Verlag. — 2011. — 178 p.
7. Bhatnagar P. L. A model for collision processes in gases. I: Small amplitude processes in charged and neutral one-component system / P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook // *Physical Review*. — 1954. — Vol. 94, №3. — P. 511–525.
8. He X., Luo L-S. Theory of the lattice Boltzmann equation: from Boltzmann equation to lattice Boltzmann equation / X. He, L-S. Luo // *Physical Review E*. — 1997. — Vol. 56, №6. — P. 6811–6817.
9. Sokup M. C. *Lattice Boltzmann Modeling* / M. C. Sokup, D.T. Thorne. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. — 2006. — 173 p.

10. Qian Y. N. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation / Y. N. Qian, D. D'Humieres, P. Lallemand // *Europhysics Letters*. —1992. — Vol. 17, № 6. — P.479–484.
11. Cercignani C. *The Boltzmann Equation and Its Applications* / C. Cercignani. — New York etc. : Springer-Verlag, 1988. — 455 p.
12. Inamuro T. A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations / T. Inamuro, M. Yoshina, F. Ogino // *Physics of Fluids*. — 1995. — Vol. 7, № 12. — P. 2928–2930.

Actuality of study of the peristaltic processes that ensure the movement of fluids in the human body is substantiated. Whereas the traditional approach to mathematical modeling of real peristaltic processes causes a number of problems associated with increasing of the computation complexity and violating of the conservation laws, the paper presents the application of mathematical modeling technology based on lattice Boltzmann equation. Theoretical Foundations of lattice Boltzmann model and especially its use in two-dimensional lattice is described. Much attention is paid to the peculiarities of formation of boundary conditions at the macroscopic level and the level of the lattice sites. Results of simulations of the peristaltic process in the digestive tract are given.

Key words: *lattice Boltzmann equation, mathematical modeling, peristaltic process, BGK-model.*

Отримано: 15.09.2014

UDC 681.5.015:[52+87]

V. D. Pavlenko, D. Sc, Professor,

V. A. Speranskyy, Ph. D.

Odessa national polytechnic university, Odessa

THE TOOLKIT FOR NONPARAMETRIC IDENTIFICATION NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS BASED ON VOLTERRA MODELS IN FREQUENCY DOMAIN

The software-hardware tools used for nonlinear dynamical systems nonparametric identification based on Volterra models in frequency domain are presented. The polyharmonic test impacts are selected as the test ones. The proposed methodology and the toolkit are used for building the communication channel model.

Key words: *nonlinear dynamical systems, Volterra models, frequency domain, nonparametric identification, polyharmonic signals, multidimensional frequency characteristics, identification toolkit.*

Introduction. Increasing complexity of the technical systems and objects being studied and planned necessitates the development of mathematical models. Such models have to take into account nonlinear and dynamic properties of mentioned systems and objects. Also the development of efficient computer implementation of tools for constructing such models is needed.