

6. Barrat J. L. large slip effect at a nonwetting fluid-solid interface / J. L. Barrat, L. Bocquet // Physical Review Letters. — 1999. — Vol. 82. — P. 4671–4674.
7. Буевич Ю. А. К теории совместной фильтрации несмешивающихся жидкостей в поле тяжести / Ю. А. Буевич // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1967, № 2. — С. 165–167.
8. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. — Е. 1 / Р. И. Нигматулин. — М. : Наука, 1987. — 464 с.
9. Бернадинер М. Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М. Г. Бернадинер, В. М. Ентов. — М. : Наука, 1975. — 199 с.
10. Леонов Е. Г. Гидроаэродмеханика в бурении / Е. Г. Леонов. — М. : Недра, 1987. — 304 с.
11. Сулейманов Б. А. Об эффекте проскальзывания газожидкостной системы при фильтрации в пористой среде / Б. А. Сулейманов, Х. Ф. Азизов // Нефтяное хозяйство. — 1996. — № 6. — С. 39–42.

The expressions for determining the coefficients of sliding and expenses when filtering Newtonian and non-Newtonian carbonated liquids in a porous medium in the subcritical region. Shows the consistency of the theoretical studies when comparing them with the results of practical calculations.

Key words: *newtonian fluid, non-Newtonian fluid filtering carbonated liquid, the coefficient of sliding, reservoir pressure, permeability and porosity of the environment.*

Отримано: 19.06.2014

УДК 004.61

В. С. Савіч, аспірант,
О. П. Ошовська, магістр

Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ НЕНЬЮТОНІВСЬКИХ РІДИН У НЕОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Розглянуто можливості застосування параметрів ефективної проникності та ефективної в'язкості в математичних моделях процесів фільтрації неньютонівських рідин в однорідних та слоїсто-неоднорідних пористих середовищах. Теоретично отримано залежності, які описують плин неньютонівських рідин за умови введення ефективних проникності та в'язкості, а також експериментально підтверджено вид цих залежностей.

Ключові слова: *математична модель; фільтрація в пористому середовищі; неньютонівські рідини; проникність пористого середовища; в'язкість рідини, що фільтрується.*

Вступ. Як відомо [1; 2], для неньютонівських (або — аномальних [3]) рідин приймається степеневий закон фільтрації, однак, в рамках степеневого закону описати отримані S-подібні криві не вдається [4–6].

Строго кажучи, ця задача повинна розв'язуватися з урахуванням масообміну між шарами різної проникності, однак отримати прості аналітичні розв'язки для практичних розрахунків, навіть при лінійному законі фільтрації в кожному шарі слоїсто-неоднорідного пласту досить складно [7]. Разом з тим в теорії фільтрації нелінійні ефекти (які пов'язано з неоднорідністю середовища або рідини) враховуються квазігомогенізацією [8; 9], наприклад, введенням *ефективної проникності*.

Мета роботи. Покажемо можливість опису стаціонарної фільтрації неньютонівської рідини в неоднорідних пористих середовищах введенням ефективних проникності або в'язкості.

Основна частина. У подальшому дослідимо можливість введення ефективних параметрів пористого середовища.

1. Введення ефективної проникності. Не порушуючи загальності, розглянемо фільтрацію в циліндричній трубці довжиною l , заповненій пористим середовищем, причому фільтрацію зумовлено перепадом тиску $\Delta P = P_1 - P_0$. Тоді, відповідно до закону Дарсі [10; 11]

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{dP}{dx}, \quad (1)$$

де k — проникність пористого середовища, μ — в'язкість рідини. Як показали експеримент з фільтрації неньютонівських рідин в однорідному та неоднорідному пористих середовищах [5; 6] ефективна проникність при постійній в'язкості ($\mu = (\mu_{\min} + \mu_{\max})/2$) в значній мірі залежить від перепаду тиску. У тих самих літературних джерелах вказано, що залежність ефективної проникності від перепаду тиску (розглядалася ділянка не ньютонівського плинину) в однорідному пористому середовищі описується лінійною функцією (прямою), а у слоїсто-неоднорідному (або мікронеоднорідному) середовищі — нелінійною функцією (квадратним тричленом). Вочевидь, більш складні залежності можуть бути описані поліномами більш високих ступенів.

Тоді, приймаючи наприклад, тиск на виході трубки (як в експериментах [4–6]) постійним, можна представити ефективну проникність як функцію тиску у вигляді

$$k_a = a_1 (P_1 - P_0)^2 + a_2 (P_1 - P_0) + a_3, \quad (2)$$

де a_1, a_2, a_3 — сталі коефіцієнти.

Рівняння збереження маси для стаціонарного плинину при припущенні постійності пористості представимо у вигляді

$$\frac{d(\rho v)}{dx} = 0, \quad (3)$$

де ρ — густина рідини, яка фільтрується.

Стискуваність рідини будемо вважати малою, в лінійному (так званому акустичному [1]) наближенні. Таким чином, приймаємо

$$P_1 - P_0 = c^2 (\rho_1 - \rho_0), \quad (4)$$

де c — швидкість звуку в рідині.

У відповідності до (3) об'ємна витрата Q через площу поперечного перетину F відповідно системі рівнянь (1)–(4) визначається співвідношенням

$$\frac{Ql}{F} = \int_0^{\Delta P} \left(1 - \frac{P_0}{c^2 \rho_0} + \frac{P_1}{c^2 \rho_0} \right) \frac{k_a (P_1 - P_0)}{\mu} d(P_1 - P_0). \quad (5)$$

Приймаючи наступні безрозмірні параметри:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{F} \sqrt{\frac{\rho_0}{P_0}}; \quad \bar{k}(\bar{P}) = k_a \sqrt{\frac{\rho_0 P_0}{l \mu}} = k_2 \bar{P}_1^2 + k_1 \bar{P}_1 + k_0; \quad (6)$$

$$\bar{P} = \frac{P_1 - P_0}{P_0}; \quad \bar{m} = \frac{\rho_0 c^2}{P_0},$$

де k_0, k_1, k_2 — сталі коефіцієнти, та, підставляючи (6) в (5), отримаємо

$$\bar{Q} = \int_0^{\Delta \bar{P}} \left(1 + \frac{\bar{P}}{\bar{m}} \right) \bar{k}(\bar{P}) d\bar{P}, \quad (7)$$

де $\Delta \bar{P} = \frac{\Delta P_1}{P_0}$. Враховуючи, що для реальних значень $\bar{m} \approx 10^4$, приведемо (7) до виду:

$$\bar{Q} = \frac{k_2}{3} \Delta \bar{P}^3 + \frac{k_1}{2} \Delta \bar{P}^2 + k_0 \Delta \bar{P}. \quad (8)$$

Для кубічної параболи виду (8) легко розрахувати точку перегину з координатами \bar{Q}_0 та $\Delta \bar{P}_0$, а саме:

$$\Delta \bar{P}_0 = -\frac{k_1}{2k_2}; \quad \bar{Q}_0 = \frac{k_1}{2k_2} \left(\frac{k_1^2}{6k_2} - k_0 \right),$$

тобто при $k_2 > 0$, $k_1 < 0$ та $k_0 > \frac{k_1^2}{6k_2}$ залежність $\Delta \bar{P} = f(\bar{Q})$ має S-подібний характер з додатними координатами точки перегину. Позначаючи $n_0 = k_0/k_2$, з (8) отримаємо:

$$\frac{\bar{Q}}{k_2} = \frac{\Delta \bar{P}^3}{3} - \Delta \bar{P}_0 \Delta \bar{P}_1^2 + n_0 \bar{P}_1. \quad (9)$$

На рис. 1 при $\Delta \bar{P}_0 = 0,5$ та різних n_0 наведено залежності $\Delta \bar{P} = f(\bar{Q}_1)$, де $\bar{Q}_1 = (\bar{Q} k_2^{-1}) / (\bar{Q} k_2^{-1})_{\max}$, обчислені по (9), які при

$n_0 = 0,275 - 0,5$ добре описують експериментальні дані з фільтрації не ньютонівських рідин в неоднорідних пористих середовищах. Слід зазначити, що при $k_2 < 0$ та $k_1 > 0$ S-подібний характер будуть мати вже залежності $\bar{Q} = \gamma(\Delta\bar{P})$.

Приймаючи в (6) $k_2 = 0$ (тобто не враховуючи квадратичний член) з (7) отримаємо

$$\frac{\bar{Q}}{k_1} = \frac{\Delta\bar{P}^2}{2} + n_1 \Delta\bar{P}, \quad (10)$$

де $n_1 = k_0/k_1$.

На рис. 2 при різних n_1 наведено залежності $\Delta\bar{P} = f(\bar{Q}_2)$, де $\bar{Q}_2 = (\bar{Q}k_1^{-1})/(\bar{Q}k_1^{-1})_{\max}$, обчислені по (10), які описують експериментальні дані з фільтрації неньютонівських рідин в однорідному пористому середовищі при $n_1 = -0,04 - 0,5$ ($k_1 > 0$). Слід зазначити, що при $k_1 < 0$ залежність $\Delta\bar{P} = f(\bar{Q})$ має характер зростання без насиченості.

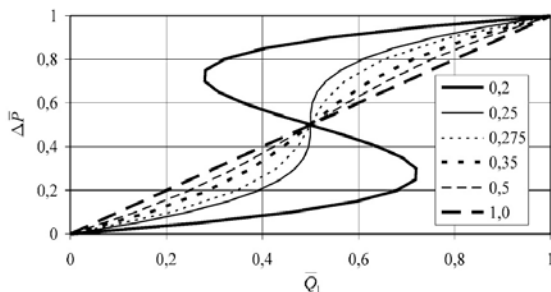


Рис. 1. Залежність $\Delta\bar{P} = f(\bar{Q}_1)$, обчислена за виразом (9)

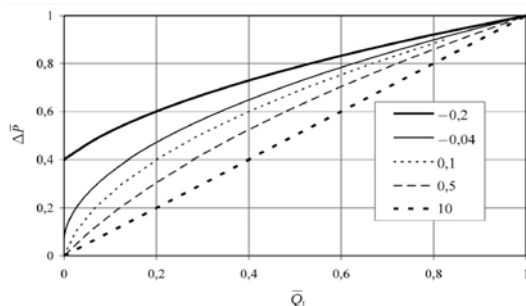


Рис. 2. Залежність $\Delta\bar{P} = f(\bar{Q}_2)$, обчислена за виразом (10)

2. Введення ефективної в'язкості. Отримані вище розв'язки мають той недолік, що вони описують експериментальні дані в обмеженому інтервалі значень визначаючих параметрів. Це властиво рівнянням в поліноміальній формі (див. рис. 1 та рис. 2). У низці відносно нових робіт [12; 13] для опису законів фільтрації ньютонівських рідин вводиться залежність в'язкості від швидкості зсуву i , відповідно, від швидкості фільтрації при постійній проникності пористого середовища. Очевидно, що отримані розв'язки приводять до раніше розглянутих випадків.

Для усунення цих недоліків в рівнянні (1) прийемо проникність k постійною, а в'язкість μ — залежною від перепаду тиску. Як видно з рис. 3 та рис. 4, експериментальна залежність ефективної в'язкості від перепаду тиску (розглядається ділянка ньютонівського плинну) в однорідному пористому середовищі описується прямою, а в слоїсто-неоднорідному та мікронеоднорідному середовищі — квадратним тричленом (також вочевидь, більш складні залежності можуть бути описані поліномами більш високих ступенів).

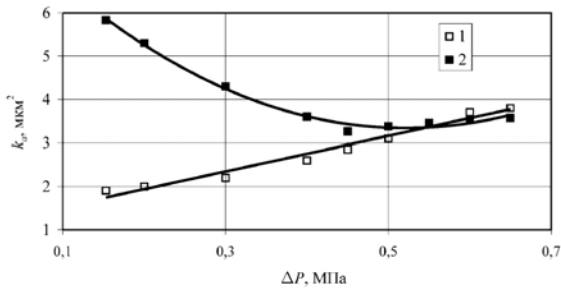


Рис. 3. Залежність експериментальної в'язкості від перепаду тиску в однорідному пористому середовищі

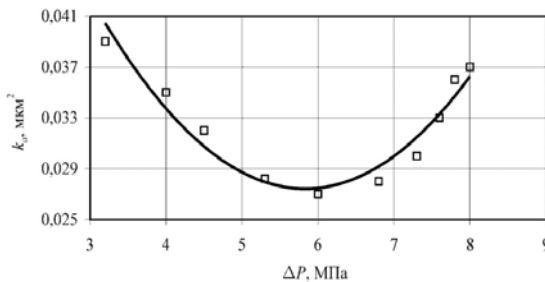


Рис. 4. Залежність експериментальної в'язкості від перепаду тиску в слоїсто-неоднорідному середовищі

Тоді, приймаючи, наприклад, тиск на виході зразка (як і в експериментах) постійними, можемо представити ефективну в'язкість як функцію диску у вигляді

$$\mu_a = b_1 (P_1 - P_0)^2 + b_2 (P_1 - P_0) + b_3, \quad (11)$$

де b_1, b_2, b_3 — сталі коефіцієнти.

Приймаючи рівняння збереження маси для стаціонарного плинину вигляді (3) та вважаючи, що рідина є такою, яка мало стискається, в лінійному (акустичному) наближенні, використовуємо рівняння (4). Розв'язуючи спільно рівняння (1), (3) та (4) при умові (11), для об'ємної витрати рідини отримаємо

$$\frac{Ql}{F} = \int_0^{\Delta P} \left(1 - \frac{P_0}{c^2 \rho_0} + \frac{P_1}{c^2 \rho_0} \right) \frac{k}{\mu_a (P_1 - P_0)} d(P_1 - P_0), \quad (12)$$

де k — абсолютна проникність пористого середовища.

Приймаючи наступні безрозмірні параметри:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{F} \sqrt{\frac{\rho_0}{P_0}}; \bar{\mu}(\bar{P}) = \frac{\mu_a l}{k \sqrt{\rho_0 P_0}} = a \bar{P}^2 + b \bar{P} + s; \bar{P} = \frac{P_1 - P_0}{P_0}; \bar{m} = \frac{\rho_0 c^2}{P_0}, \quad (13)$$

де a, b, s — сталі коефіцієнти, з (12) отримаємо

$$\bar{Q} = \int_0^{\Delta \bar{P}} \left(1 + \frac{\bar{P}}{\bar{m}} \right) \frac{d\bar{P}}{\bar{\mu}(\bar{P})}. \quad (14)$$

Після очевидних перетворень та враховуючи, що $\bar{m} \approx 10^4$, при $b^2 - 4as > 0$ з (14) отримаємо

$$\Delta \bar{P} = \frac{2s \left[\exp\left(\bar{Q} \sqrt{b^2 - 4as}\right) - 1 \right]}{\sqrt{b^2 - 4as} \left[1 + \exp\left(\bar{Q} \sqrt{b^2 - 4as}\right) \right] + b \left[1 - \exp\left(\bar{Q} \sqrt{b^2 - 4as}\right) \right]}. \quad (15)$$

Крива, яку описує (15), має точку перегину з координатами \bar{Q}_0

та $\Delta \bar{P}_0$. При цьому $\bar{Q}_0 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4as}} \ln \left| \frac{b + \sqrt{b^2 - 4as}}{\sqrt{b^2 - b - 4as}} \right|$; $\Delta \bar{P}_0 = -b/2a$,

тобто при $s > 0$, $b > 0$ та $a < 0$ залежність $\Delta \bar{P} = f(\bar{Q})$ має S-подібний характер з додатними координатами перегину.

Приймаючи в (13) $a = 0$ (тобто без врахування квадратичного члена), з (14) получимо

$$\Delta \bar{P} = \frac{s \left[\exp(b\bar{Q}) - 1 \right]}{b}. \quad (16)$$

Аналіз рівняння (16) показує, що при $b < 0$, $s > 0$ залежність $\Delta \bar{P} = f(\bar{Q})$ має характер зростання без насичення.

На рис. 5 при $\Delta\bar{P} = 0,5$ та різних s ($a = -6,6$, $b = 6,6$) наведено залежності $\Delta\bar{P}_* = f(\bar{Q})$ ($\Delta\bar{P}_* = \Delta\bar{P}/\Delta\bar{P}_{\max}$), обчислені по (15), які при $s = 0,1$ добре описують експериментальні дані з фільтрації не ньютонівських рідин в неоднорідному пористих середовищі.

На рис. 6 при різних b ($c = 2$) наведено залежності $\Delta\bar{P}_* = f(\bar{Q})$, обчислені по (16), які добре описують експериментальні дані з фільтрації ньютонівських рідин в однорідних пористих середовищах.

Слід зазначити, що при $b^2 - 4as < 0$ вираз (14) має розв'язок

$$\Delta\bar{P} = \frac{\sqrt{4as - b^2}}{2a} \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{Q}}{2} \sqrt{4as - b^2} + \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{4as - b^2}} \right) - \frac{b}{2a} \quad (17)$$

або, обчислюючи з (17) \bar{Q} :

$$\bar{Q} = \frac{2}{\sqrt{4as - b^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2a\Delta\bar{P} + b}{\sqrt{4as - b^2}} - \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{4as - b^2}} \right). \quad (18)$$

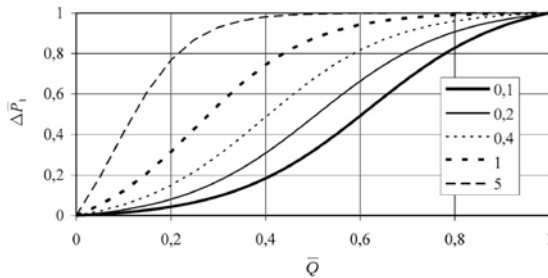


Рис. 5. Залежність $\Delta\bar{P}_* = f(\bar{Q})$, обчислена за виразом (15)

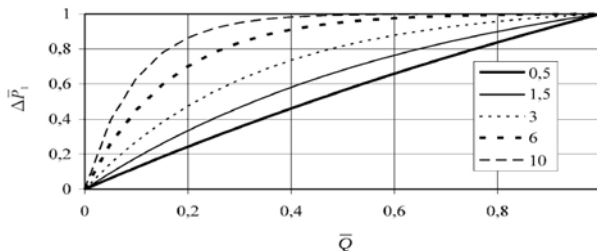


Рис. 6. Залежність $\Delta\bar{P}_* = f(\bar{Q})$, обчислена за виразом (16)

Аналіз виразу (18) показує, що при $b > 0$ та $a > 0$ залежність $\bar{Q} = \gamma(\Delta\bar{P})$ носить S-подібний характер, описуючи фільтрацію з не-

монотонною ефективною в'язкістю, яка має мінімум при певному перепаді тиску. Такий закон фільтрації, відповідно до [14], спостерігається для певних полімерних композицій (псевдо пластичний режим фільтрації змінюється на ділатантний). Зауважимо також, що, якщо в рівнянні (16) $b > 0$ та $s > 0$, залежність $\Delta\bar{P} = f(\bar{Q})$ має характер зростання без насиченості.

3. S-подібний закон фільтрації. Як було зазначено вище, S-подібні залежності $\Delta\bar{P} = f(\bar{Q})$ описуються в рамках модифікованого (за рахунок введених ефективних проникності та в'язкості) лінійного закону фільтрації Дарсі. Однак опис можливий також і в рамках модифікації нелінійного закону фільтрації Форхгеймера:

$$-\frac{dP}{dx} = \alpha v + \beta v^2 + \lambda v^3.$$

Аналіз цього рівняння показує (при спільному розв'язуванні з (3)), що при $\alpha = 0$ та $\lambda < 0$ воно має S-подібний розв'язок для функцій $\Delta P = \varphi(v)$ та $\Delta P = \varphi(Q)$, причому наведені вище експериментальні результати (рис. 3–6) описуються вказаною моделлю з похибкою до 5%.

У зв'язку з цим закон фільтрації, що має S-подібний розв'язок для функцій $\Delta P = \varphi(v)$ та $\Delta P = \varphi(Q)$ або S-подібний закон фільтрації для одновимірного випадку, може бути записано у вигляді:

$$-\frac{dP}{dx} = \alpha v^2 + \beta v^3; \quad \alpha > 0, \quad \beta < 0.$$

Слід зазначити, що додавання квадратичного або кубічного доданків в закон фільтрації обумовлено не тільки покращенням апроксимації залежності $\Delta P = \varphi(v)$ за рахунок збільшення числа емпіричних коефіцієнтів [15], але й фізичними особливостями фільтрації. Лінійний член відбиває визначальний вплив сил в'язкості, квадратичний — нерівноважних властивостей фільтраційного потоку, а кубічний — масообміну між низько- та високопроникними ділянками (тобто властивостями пористого середовища).

Висновок. Таким чином, введення ефективних проникності та в'язкості дозволяє врахувати нелінійні ефекти при стаціонарній фільтрації ньютонівських рідин в однорідних та неоднорідних пористих середовищах.

Список використаних джерел:

1. Сулейманов Б. А. Особенности фильтрации гетерогенных систем / Б. А. Сулейманов. — М. : РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2006. — 354 с.

2. Щелкачев В. Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации / В. Н. Щелкачев. — М. : Нефть и газ, 1995. — Ч. 1. — 586 с.
3. Бернадинер М. Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М. Г. Бернадинер, В. М. Ентов. — М. : Наука, 1975. — 199 с.
4. Сулейманов Б. А. Экспериментальные исследования фильтрации релаксирующих жидкостей в неоднородных пористых средах / Б. А. Сулейманов, Э. М. Аббасов, Н. С. Алиев // Инженерно-физический журнал. — 1996. — Т. 69, № 1. — С. 9–15.
5. Малкин А. Я. Нормальные напряжения при течении аномально-вязких полимерных систем / А. Я. Малкин // Механика полимеров. — 1971. — № 3. — С. 506–514.
6. Меликов Г. Х. Экспериментальное исследование влияния релаксационных свойств газожидкостных систем на фильтрацию в неоднородных пористых средах / Г. Х. Меликов // Изв. ВУЗов СССР. Нефть и газ. — 1988, № 10. — С. 35–38.
7. Бан А. Р. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. / А. Р. Бан, А. Ф. Богомолова, В. А. Максимов. — М. : Энергия, 1985. — 275 с.
8. Quintard M. Two phase flow in heterogeneous porous media: the method of large-scale averaging / M. Quintard, S. Whitaker // Transport in porous media. — 1988. — № 3. — P. 357–413.
9. Saez A. The effective homogeneous behavior of homogeneous porous media / A. Saez, C. J. Otero, I. Rusinek // Transport in porous media. — 1989. — № 4. — P. 212–238.
10. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. — М. : Недра, 1982. — 406 с.
11. Кричлоу Г. Б. Современная разработка нефтяных месторождений — проблемы моделирования / Г. Б. Кричлоу. — М. : Недра, 1979. — 302 с.
12. Chauveteau G. Rodlike Polymer Solution Flow Through Fines Pores: Influence of Pore Size on Rheological Behavior / G. Chauveteau // Journal of the Rheological. — 1999. — V. 26 (2). — P. 111–142.
13. Enevoldsen J. Pressure Drop Through Gravel Packs / J. Enevoldsen, H. K. Rasmussen // Annual Transactions of the Nordic Rheology Society. — 1995. — Vol. 3. — P. 45–47.
14. Григорашенко В. И. Применение полимеров в добыче нефти / В. И. Григорашенко, Ю. В. Зайцев, А. Х. Мирзаджанзаде. — М. : Недра, 1978. — 213 с.
15. Баренблат Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблат, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. — М. : Недра, 1989. — 488 с.

Possibility of the use of parameters of effective permeability and effective viscosity is considered in the mathematical models of processes of filtration of non-newtonian liquids in homogeneous and stratified-heterogeneous porous environments. Dependences are got in theory, describing the flow of non-newtonian liquids on condition of introduction of effective permeability and viscosity, and also the type of these dependences is experimentally confirmed.

Key words: *mathematical model, filtration in a porous environment, non-newtonian liquid, permeability of porous environment, viscosity of filter-passing liquid.*

Отримано: 23.09.2014