

УДК 519.6

**В. А. Федорчук**, д-р техн. наук,**О. І. Махович**, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ЕЛЕКТРОПРИВОДУ З РОЗПОДІЛЕНОЮ МЕХАНІЧНОЮ ЛАНКОЮ**

У статті розглядаються питання особливостей використання різних форм математичного опису електромеханічних систем на прикладі дослідження електроприводу з розподіленою механічною ланкою.

**Ключові слова:** *інтегральна макромоделювання, диференціальне рівняння в частинних похідних, динамічні характеристики.*

**Вступ та постановка задачі.** Одними із найбільш складних об'єктів комп'ютерного моделювання є електромеханічні системи з розподіленими параметрами. При їх проектуванні необхідно оперувати складними математичними описами у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних та їх систем. Необхідним етапом підготовки моделей таких систем для комп'ютерної реалізації є вибір форми математичного опису, оскільки при цьому можна враховувати особливості їх числової реалізації, проводити редукцію складних моделей із забезпеченням необхідної адекватності, узгоджувати рівні похибок у вихідних даних з похибками обчислень, що впливає на точність розв'язків та складність обчислювальних процедур. Тому програмні засоби моделювання, які розробляються, повинні представляти розвинуту інформаційно-комп'ютерну технологію, яка дає змогу реалізовувати різні способи розв'язування дослідницьких чи проектних задач.

При розробці і проектуванні сучасних електромеханічних систем з розподіленими параметрами виникає необхідність у розв'язанні складних розрахункових задач. До таких задач відноситься задача визначення поведінки об'єкта при заданих вхідних даних, аналіз перехідних процесів, що проходять у двигуні і у виконавчому механізмі, вивчення впливу окремих параметрів елементів системи на її стійкість та синтез елементів для якісного керування.

Аналіз сучасної літератури показує, що для електромеханічних систем, які містять ланки з розподіленими параметрами залишається актуальною проблема отримання математичних моделей (з урахуванням особливостей їх числової реалізації), які б давали змогу досягти необхідної адекватності при відносній простоті обчислювальних алгоритмів. Особ-

ливо ця проблема актуальна для розробки систем керування із вмонтованими комп'ютерними моделями об'єктів керування.

**Основна частина.** Прикладом електромеханічного об'єкта з розподіленими параметрами є система, що складається з електродвигуна, який приводить в рух довгий вал довжиною  $l$  з рівномірно розподіленою масою  $m$ , на кінці якого закріплений об'єкт керування масою  $m_2$  (рис. 1). Механічна частина є неоднорідною ланкою з розподіленими параметрами, оскільки вона складається з двох різних за характеристиками елементів. Для механічної ланки входною величиною є момент кручення  $M$ , який створюється асинхронним електродвигуном (АЕ).

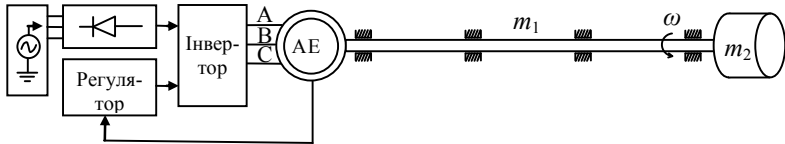


Рис. 1. Схема електропривода з розподіленою механічною ланкою

Для опису обертального руху однорідного вала використаємо рівняння в частинних похідних

$$J \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} - GJ_p \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

з граничними та початковими умовами

$$\frac{\partial \omega(l,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \omega(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega(x,0)}{\partial t} = 0; \quad \omega(x,0) = 0,$$

де  $\omega$  — частота обертання вала;  $J$  — момент інерції;  $G$  — модуль зсуву;  $\tau$  — коефіцієнт опору;  $J_p$  — полярний момент інерції.

Оскільки механічна розподілена ланка є неоднорідною і, враховуючи те, що об'єкт керування можна вважати таким, що має зосереджену масу, доцільним є використання апроксимаційного подання розподіленої ланки у вигляді багатомасової системи з пружними зв'язками. З математичної точки зору це еквівалентно апроксимаційному поданню (1) у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь. Застосувавши метод прямих до рівняння (1) отримаємо систему з  $n$  диференціальних рівнянь

$$J_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} + \tau_i \frac{\partial \omega_i}{\partial t} - GJ_{pi} (\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}) = M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

де  $\omega_i$  — частота обертання  $i$ -го елемента вала;  $M_i$  — момент кручення, що діє на  $i$ -й елемент  $\tau_i$  — коефіцієнт опору обертальному руху  $i$ -го елемента вала;  $J_{pi}$  — полярний момент інерції  $i$ -го елемента вала.

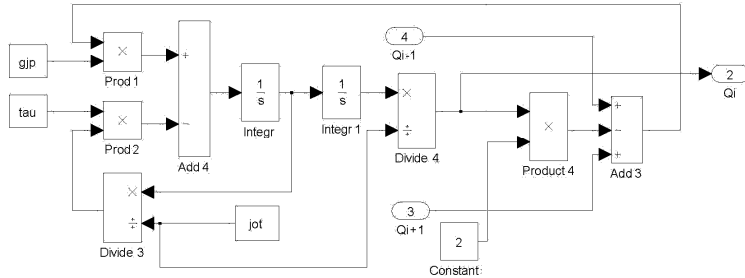
Після інтегрування системи (2) отримаємо систему

$$J_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \tau_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - GJ_{pi} (\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}) = M_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

де  $\varphi_i$  — кут зсуву  $i$ -го елемента.

Отримана модель у вигляді системи диференціальних рівнянь дає змогу провести декомпозицію вихідної моделі за змінною  $\varphi$  на  $n$  ланок. Якщо проводити декомпозицію далі на рівні отриманих ланок, то доцільно виділити в її структурі величини, які мають фізичний зміст, що дасть можливість реалізувати динамічні нелінійні залежності через статичні (наприклад, використання гістерезисної нелінійної залежності дасть змогу відтворити в структурній моделі ефект втрати частини енергії деформації внаслідок внутрішнього тертя) [1].

Після еквівалентних перетворень моделі (3) для реалізації  $i$ -х диференціальних рівнянь системи отримаємо структурну ланку у вигляді підсистеми simulink-моделі моделюючого середовища Matlab, приведеної на рис. 2.



**Рис. 2.** Simulink-модель підсистеми, що реалізує  $i$ -те диференціальне рівняння системи (3)

Отримана підсистема складає основу для синтезу структурної комп'ютерної моделі, що реалізує систему рівнянь (3). З'єднання підсистем здійснюється у відповідності до зв'язків між параметрами в системах диференціальних рівнянь (рис. 3).



**Рис. 3.** Структурна реалізація ділянки пружного вала при його апроксимації зосередженими масами

Для моделювання асинхронного електродвигуна з системою керування використаємо стандартні засоби Matlab із набору SimPowerSystems Simulink Blocksets (рис. 4). Подавши отриману Simulink-модель у вигляді підсистеми (AC4) та використавши модель, що реалізує систему (3) отримаємо Simulink-модель електропривода з розподіленою механічною ланкою, яку зображено на рис. 5.

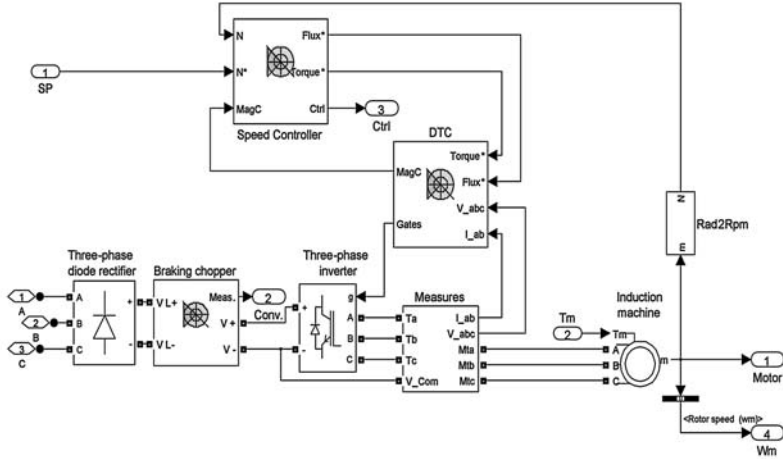


Рис. 4. Simulink модель асинхронного електродвигуна з системою керування

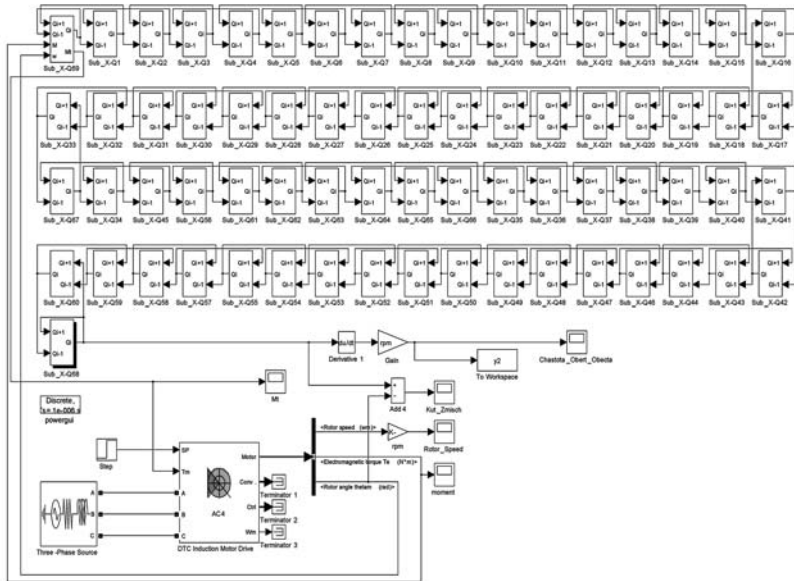


Рис. 5. Simulink-модель електропривода з структурною розподіленою ланкою

Дана Simulink-модель має ряд позитивних властивостей, зокрема допускає відмінність параметрів розподіленої ланки на окремих її ділянках. Однак, при числовій реалізації апроксимованої моделі (3) виникає ефект Гіббса, що вносить часто суттєві похибки в отримані

розв'язки і погіршує стійкість обчислювального алгоритму. Для підвищення точності апроксимації можна збільшувати число рівнянь в (3), але це приводить до збільшення обсягів обчислень.

У випадках, коли потрібно отримувати результати моделювання з високою точністю, доцільним є використання еквівалентних інтегральних макромоделей, при числовій реалізації яких відсутній ефект Гіббса, а квадратурні алгоритми забезпечують не лише обчислювальну стійкість, але й властивість згладжування при наявності у вхідних даних високочастотних завад [2].

Так модель (1) можна звести до інтегрального вигляду:

$$\varphi(t) = \int_0^t K(t, \tau) M(\tau) d\tau, \quad (4)$$

де  $K(t, \tau)$  — ядро інтегрального оператора Вольтерри, яке містить динамічні властивості розподіленої ланки. У випадку лінійної постановки задачі ядро моделі (4) можна отримати з перехідної характеристики динамічного об'єкта, яка, в свою чергу, отримується експериментально чи з обчислювального експерименту, як реакція на одиничний стрибок (функцію Хевісайда). При цьому використовується залежність:

$$K(t, \tau) = \frac{\partial h(t, \tau)}{\partial \tau},$$

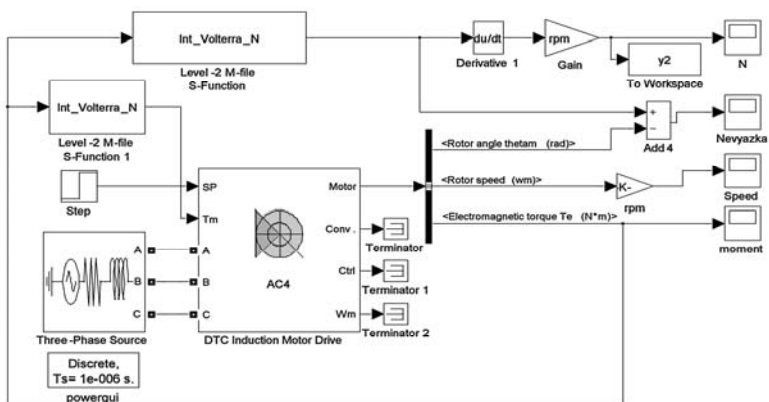
де  $h(t, \tau) = y(t)$  — перехідна характеристика динамічного об'єкта.

Оскільки при числовій реалізації моделі (4) спостерігається збільшення обсягів обчислень з ростом часової змінної  $t$ , доцільно використовувати інтегральні моделі з виродженим ядром

$$\varphi(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \beta_i(\tau) M(\tau) d\tau, \quad (5)$$

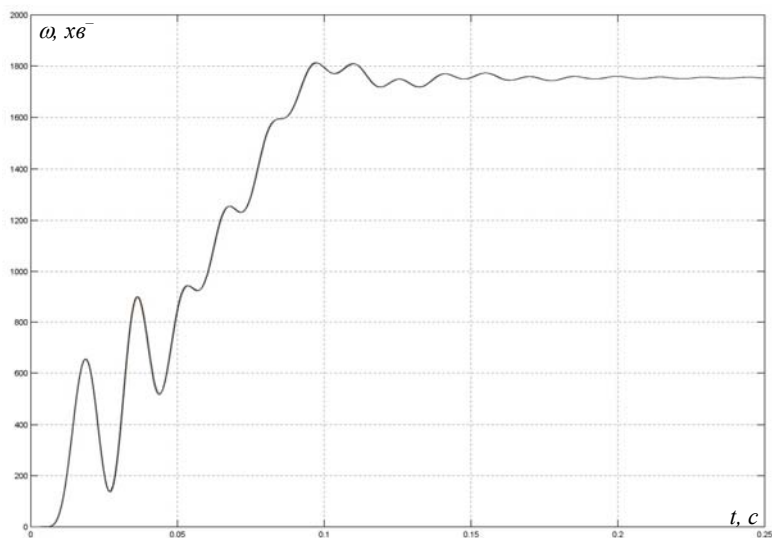
числова реалізація яких має незмінну кількість обчислень на кожному кроці дискретизації часової змінної. Ефективним способом отримання виродженого ядра із ядра загального вигляду, в тому числі заданого таблично, є метод, описаний в роботі [3].

Для порівняння швидкодії алгоритмів, що базуються на використанні моделей (3) та (5) проведемо дослідження електромеханічної системи, що приведена на рис. 1. Для отримання графіка перехідного процесу з використанням моделі розподіленої ланки (3) використаємо Simulink-модель, що зображена на рис. 5. Для знаходження перехідної характеристики системи скористаємося представленням, в якому розподілена ланка реалізована за допомогою інтегрального оператора з виродженим ядром (рис. 6).



**Рис. 6.** Simulink-модель електропривода з інтегральною розподіленою ланкою

Графіки результатів, що відображають перехідний процес в системі для різних варіантів представлення розподіленої механічної ланки практично співпадають (рис. 7).



**Рис. 7.** Графіки перехідного процесу електропривода з розподіленою ланкою

Розбіжність результатів моделювання приведена на рис. 8. Однак, час розрахунку з використанням представлення моделі розподіленої ланки у вигляді інтегрального оператора Вольтерри з виродженим ядром виявився майже в 3,5 рази меншим, ніж у випадку її представлення системою звичайних диференціальних рівнянь (3).

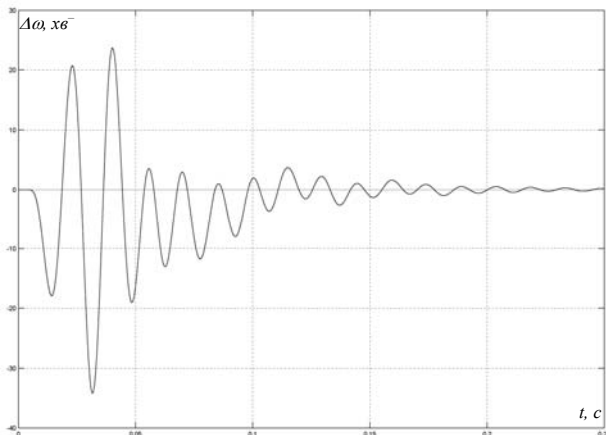


Рис. 8. Графік різниці отриманих розв'язків

**Висновки.** Отже, результати обчислювальних експериментів, що були проведені з використанням різних форм математичного опису ланки з розподіленими параметрами показали, що використання інтегральних моделей дає змогу спростити обчислювальні процедури при забезпеченні прийнятної точності отримуваних розв'язків. Перспективним напрямком подальших досліджень є розвиток методів ідентифікації інтегральних моделей на основі аналітичних перетворень чи експериментальних даних.

#### Список використаних джерел:

1. Федорчук В. А. Моделирование типовых распределенных звеньев механической системы буровой установки / В. А. Федорчук // Электронное моделирование. — 2010. — Т. 32. — № 3. — С. 95–110.
2. Федорчук В. А. Интегральный метод математического моделирования некоторых видов объектов с распределенными параметрами / В. А. Федорчук // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. С. Пухова. — К. : ІПМЕ НАНУ, 2005. — Вип. 28. — С. 25–31.
3. Верлань Д. А. Ітераційні алгоритми апроксимації функцій двох змінних / Д. А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2009. — Вип. 2. — С. 24–32.

The article deals with the peculiarities of using different forms of mathematical description of electromechanical systems research as an example of a distributed electric mechanical link.

**Key words:** *integral model, differential equation, dynamical characteristics.*

Отримано: 18.09.2014