УДК 519.6

Д. А. Верлань*, аспирант,
К. С. Чевская,** ассистент

*Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченка, г. Киев,
**Каменец-Подольский национальный университет
имени Ивана Огиенка, г. Каменец-Подольский

СПОСОБЫ ФОРМИРОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрены способы формирования интегральных динамических моделей нелинейных систем регулирования, в том числе структурный способ получения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра II рода, а также частотные способы формирования моделей в виде нелинейного интегрального уравнения типа Фредгольма с оператором Гаммерштейна, отображающего периодические режимы системы регулирования.

Ключевые слова: *динамические системы, системы регулирования, интегральные уравнения.*

Введение. Системы регулирования выходных координат технических объектов, реализующие принцип управления по отклонению, представляет собой динамические системы с обратными связями. Традиционными математическими моделями таких систем являются обыкновенные дифференциальные уравнения, формирующиеся по заданной структуре системы и её физическим параметрам, которые отображаются в коэффициентах уравнений. Таким образом, дифференциальные динамические модели являются параметрическими моделями.

Во многих случаях объекты управления (регулирования) задаются своими динамическими характеристиками, представляющими собой функции времени. В этих случаях вполне естественным является применение интегральных уравнений, формирующихся непосредственно по динамическим характеристикам звеньев динамической системы [1]. Полученные интегральные уравнения являются непараметрическими динамическими моделями и отличаются от обыкновенных дифференциальных уравнений повышенной универсальностью, поскольку допускают возможность прямого отображения динамических систем, содержащих звенья с распределенными параметрами [2]. Кроме того, интегральные уравнения позволяют использовать новые методы качественного исследования динамических систем и численной реализации моделей [3]. Таким образом, можно считать достаточно актуальной рассматриваемую в работе задачу формирования интегральных динамических моделей нелинейных систем регулирования.

Формирование интегральных динамических моделей систем регулирования. Без существенного ограничения общности решаемой задачи рассмотрим систему регулирования, содержащую одно нелинейное звено, статическая характеристика которого имеет вид

$$y = F(x) \tag{1}$$

и линейную часть с передаточной функцией $W(p) = \dfrac{K(p)}{D(p)}$. Тогда уравнение движения системы, где $\bar{x}(p) = L\{x(t)\}$, $\bar{y}(p) = L\{y(t)\}$, $\bar{f}(p) = L\{f(t)\}$ — соответствующие переменные (сигналы) и их операторные изображения, имеет вид

$$\bar{x} - \left[W(p)\bar{y} + \bar{f}\right] = 0, \tag{2}$$

(f — внешнее воздействие). К соответствующей структурной схеме (рис.1) может быть приведена любая система с одной безынерционной нелинейностью F; при этом внешнее возмущение всегда может быть приведено к входу нелинейного звена.

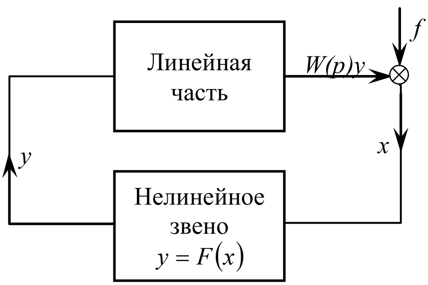

Рис. 1. *Структурная схема системы с одной нелинейностью*

С учетом (1) уравнение (2) в действительной области записывается в виде

$$x(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau + f(t), \tag{3}$$

где $g(t-\tau)$ — весовая функция, соответствующая передаточной функции $W(p)$. Подставляя (1) в (3), получим интегральное уравнение, определяющее переходные процессы $x(t)$ в системе, в виде

$$x(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,F\left[x(\tau)\right]d\tau + f(t), \tag{4}$$

и представляющее собой нелинейное уравнением Вольтерра второго рода [4]. Такие уравнения можно использовать для доказательства существования и единственности решений исходных эквивалентных систем дифференциальных уравнений, анализа динамики систем автоматического регулирования, анализа устойчивости и оценки максимально возможных отклонений регулируемых величин, т.д.

Достаточно перспективным представляется применение метода интегральных уравнений к исследованию периодических режимов нелинейных систем, в связи с чем рассмотрим способ получения такого уравнения для системы, представленной на рис. 1. Отметим, что данная система в общем случае может иметь более сложную передаточную функцию, чем дробно-линейная, в частности, линейная часть может содержать звенья с запаздыванием, с распределенными параметрами, а также переменными параметрами (нестационарные звенья). В этом случае весовая функция линейной части будет произвольной функцией двух переменных $g(t,\tau)$, причем $g \equiv 0$ при $\tau > t$, а вместо (3) будет справедливо соотношение

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} g(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau + f(t), \qquad (5)$$

причем нижний придел интегрирования равен не 0, а $-\infty$, так как начальные условия не предполагаются нулевыми.

Будем рассматривать периодические решения системы (1), (5). Здесь возможны две существенно различные постановки задачи. Если $f(t)$ — периодическая функция времени некоторой частоты ω (периода $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$) и, следовательно,

$$f(t+T) = f(t), \qquad (6)$$

то ищем вынужденные колебания, т.е. периодический режим $x(t)$ в простейшем случае той же частоты ω:

$$x(t+T) = x(t). \qquad (7)$$

Если же $f \equiv 0$, то искомые периодические решения соответствуют свободным колебаниям (устойчивые режимы — автоколебаниям). В этом случае частота ω заранее неизвестна, а начальная фаза решения (начало отсчета времени) может быть выбрана произвольной.

Если исследуемая система имеет периодическое решение (7), то

$$y(t+sT) = y(t) \text{ при } s = 1, 2, 3, \ldots \qquad (8)$$

Разбивая в (5) интервал интегрирования на участки, равные периоду, получим

$$x(t)=\sum_{s=0}^{\infty}\int_{-sT}^{t-sT}g(t,\tau)y(\tau)d\tau+\sum_{s=1}^{\infty}\int_{t-sT}^{-(s-1)T}g(t,\tau)y(\tau)d\tau+f(t),\qquad(9)$$

откуда, переставив порядок суммирования и интегрирования, произведя замену $\tau=\xi-sT$ и используя (8), получим

$$\begin{aligned}x(t)&=\int_{0}^{t}\sum_{s=0}^{\infty}g(t,\xi-sT)y(\xi)d\xi+\int_{t}^{T}\sum_{s=1}^{\infty}g(t,\xi-sT)y(\xi)d\xi+f(t)=\\&=\int_{0}^{T}G(t,\xi)y(\xi)d\xi+f(t).\end{aligned}\qquad(10)$$

Соотношение (10) определяет установившуюся периодическую реакцию $x(t)$ линейной части на произвольный периодический входной сигнал $y(t)$. Ядро интегрального соотношения в правой части (10)

$$G(t,\tau)=\begin{cases}\sum\limits_{s=0}^{\infty}g(t,\tau-sT), & 0<\tau<t;\\ \sum\limits_{s=1}^{\infty}g(t,\tau-sT), & t<\tau<T\end{cases}\qquad(11)$$

естественно назвать периодической весовой функцией.

Подставляя (1) в (10), получаем интегральное уравнение относительно периодического режима $x(t)$:

$$x(t)=\int_{0}^{T}G(t,\tau)F\left[x(\tau)\right]d\tau+f(t),\qquad(12)$$

которое представляет собой нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна [5].

Для стационарных систем весовая функция зависит только от разности $t-\tau$, т.е. $g(t,\ \tau)=g(t-\tau)$, поэтому в данном случае

$$G(t,\tau)=R(t-\tau)=\begin{cases}\sum\limits_{s=0}^{\infty}g(t-\tau+sT), & 0<\tau<t;\\ \sum\limits_{s=1}^{\infty}g(t-\tau+sT), & t<\tau<T.\end{cases}\qquad(13)$$

Как нетрудно видеть, функция одного переменного $R(u)$ — это периодическая функция периода T, равная на отрезке $0<u<T$

$$R(u)=\sum_{s=0}^{\infty}g(u+sT).\qquad(14)$$

Отсюда ясен физический смысл периодической весовой функции: она представляет собой установившуюся реакцию стационарной линейной части системы на периодическую последовательность единичных импульсов (рис. 2, *а*). Согласно (14), $R(u)$ — это сумма реакций системы на последовательность импульсов, приложенных при $u \le 0$ (рис. 2, *б*).

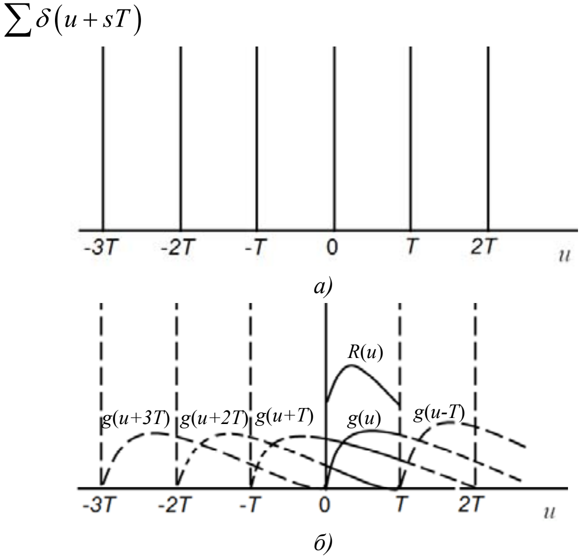

Рис. 2. *К определению периодической весовой функции*

Для стационарной линейной части, передаточная функция которой имеет вид $W(p)=\dfrac{K(p)}{D(p)}$, где $K(p)=k_n p^n+\ldots+k_1 p+k_0$ и $D(p)=d_n p^n+\ldots+d_1 p+d_0$ — операторные полиномы, весовая функция выразится соотношением

$$g(u)=\sum_{r=1}^{n}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}e^{\gamma_r u}=\sum_{r=1}^{n}\frac{e^{\gamma_r u}}{\overline{W}'(\gamma_r)}. \qquad (15)$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — корни уравнения $D(\gamma)=0$ (полюсы передаточной функции), которые для простоты изложения предполагаются простыми; $\overline{W}(p)=\dfrac{1}{W(p)}$.

Подставляя (15) в (14) и суммируя полученные геометрические прогрессии, получаем

$$R(u)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}e^{\gamma_r(u+sT)}=\sum_{r=1}^{n}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}\frac{e^{\gamma_r u}}{1-e^{\gamma_r T}},\ 0<u<T. \qquad (16)$$

При этом каждой паре комплексных корней $\gamma_r = \alpha_r \pm i\beta_r$ соответствует слагаемое

$$\frac{2e^{\alpha_r u}}{1-2e^{\alpha_r T}\cos\beta_r T+e^{2\alpha_r T}}\left\{\operatorname{Re}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}\left[\cos\beta_r u-\cos\beta_r(u-T)e^{\alpha_r T}\right]-\right.$$

$$\left.-\operatorname{Im}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}\left[\sin\beta_r u-\sin\beta_r(u-T)e^{\alpha_r T}\right]\right\}.$$

Если же уравнение $D(\gamma) = 0$ имеет кратные корни $\gamma_1, \dots \gamma_m$, кратности которых $\nu_1, \dots, \nu_m$, то вместо (16) будем иметь формулу

$$R(u)=\sum_{\nu=1}^{\nu_m}\sum_{r=1}^{m}C_{\nu r}\frac{(-1)^{\nu}}{(\nu-1)!}\frac{d^{\nu-1}}{d\gamma_r^{\nu-1}}\left(\frac{e^{\gamma_r u}}{1-e^{\gamma_r T}}\right),\ 0<u<T, \tag{17}$$

где $C_{\nu r}$ — коэффициенты в разложении на простые дроби

$$\frac{K(\gamma)}{D(\gamma)}=\sum_{\nu=1}^{\nu_m}\sum_{r=1}^{m}\frac{C_{\nu r}}{(\gamma-\gamma_r)^{\nu}}.$$

Заметим, что все полученные соотношения справедливы только для нерезонансных задач, т.е. при выполнении условия $D(ij\omega) \neq 0$ для всех действительных значений j. Необходимо также отметить, что изложенный вывод справедлив лишь в том случае, когда Re $\gamma_r < 0$ для всех значений r, т.е. для устойчивой линейной части системы. Для систем с нейтральными и неустойчивыми линейными частями перестановка суммирования и интегрирования в (9) и последующее суммирование прогрессий не имеет места. Однако соотношения (16) и (17) справедливы и в этом случае, в чем можно убедиться, используя иной вывод интегрального уравнения (12) — с помощью разложения решения в ряд Фурье.

Действительно, пусть периодическое решение $y(t)$ системы (1), (2) разлагается в ряд Фурье

$$y(t)=\frac{1}{T}\int_0^T y(\tau)d\tau+\frac{2}{T}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sin j\omega t\int_0^T\sin j\omega\tau\, y(\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\cos j\omega t\int_0^T\cos j\omega\tau\, y(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{T}\int_0^T y(\tau)d\tau+ \tag{18}$$

$$+\frac{2}{T}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^T\cos j\omega(t-\tau)\,y(\tau)d\tau.$$

Подставляя выражение (18) в (2) и определяя реакцию линейной части системы на каждую гармонику в отдельности, получаем разложение для периодического решения $x(t)$:

$$x(t)=f(t)+\frac{W(0)}{T}\int_0^T y(\tau)\,d\tau+\frac{2}{T}\sum_{j=1}^{T}\Big[\operatorname{Re}W(ij\omega)\cos j\omega(t-\tau)-\\ -\operatorname{Im}W(ij\omega)\sin j\omega(t-\tau)\Big]y(\tau)\,d\tau. \qquad (19)$$

Здесь мы по-прежнему предполагаем, что $D(ij\omega)\neq 0$ и что $D(0)\neq 0$. Случай нулевого корня у $D(p)=0$ рассматривается особо.

Используя (1), вновь получим интегральное уравнение в виде

$$x(t)=f(t)+\int_0^T R(t-\tau)F\big[x(\tau)\big]d\tau, \qquad (20)$$

причем ядро, согласно выражению (19), равно

$$R(u)=\frac{2}{T}\left\{\frac{W(0)}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\operatorname{Re}W(ij\omega)\cos j\omega u-\\ -\operatorname{Im}W(ij\omega)\sin j\omega u\Big]\right\}. \qquad (21)$$

Таким образом, периодическая функция $R(u)$ определена своим рядом Фурье (21) (в (19) использовалось почленное дифференцирование рядов Фурье, следовательно, предполагалось, что решение дифференцируемо достаточное число раз). Однако, если $F(x)$ — негладкая функция, то соответствующие решения уравнения (20) могут быть приняты в качестве обобщенных решений системы (1), **(**2**).** Заметим, что, так как в реальных системах степень полинома $K(p)$ меньше степени $D(p)$, то величины $\operatorname{Re} W(ij\omega)$ убывают не медленнее, чем $\frac{1}{j^2}$, а $\operatorname{Im} W(ij\omega)$ — не медленнее, чем $\frac{1}{j}$. Отсюда следует, что ядро $R(t-\tau)$ ограничено в квадрате $0\le t\le T$, $0\le\tau\le T$ и может иметь разрыв первого рода только при $t=\tau$, причем ряд (21) в этом случае сходится к полусумме $0{,}5[R(0)+R(T)]$.

Если исходным материалом для расчета служат частотные характеристики линейной части системы, то $R(u)$ можно вычислить непосредственно суммированием нескольких первых членов ряда (21). Однако этот ряд можно просуммировать и в общем виде для произвольной передаточной функции $W(p)$, что можно показать следующим образом.

Отметим, прежде всего, что, согласно (21), ядро $R(u)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D(p)R=\frac{2}{T}K(p)\left(\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}\cos j\omega u\right). \qquad (22)$$

Но в соответствии с [6] сумма ряда в правой части (22) есть не что иное, как разложение периодической импульсной функции

$$\frac{2}{T}\left(\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}\cos j\omega u\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\delta\left(u-sT\right), \tag{23}$$

откуда вновь получаем, что $R(u)$ есть реакция линейной части системы на периодическую последовательность импульсов (рис. 2, *а*). Отсюда вытекает, что периодическая функция $R(u)$ при $0 < u <$ Т удовлетворяет однородному уравнению

$$D\left(p\right)R=0, \tag{24}$$

а в точках приложения импульсов (при $u = 0$, $u = T$) справедливы условия скачков, которые заменяют условия периодичности:

$$\begin{aligned}
&d_n\left[R\left(0\right)-R\left(T\right)\right]=k_{n-1};\\
&d_n\left[R'\left(0\right)-R'\left(T\right)\right]+d_{n-1}\left[R\left(0\right)-R\left(T\right)\right]=k_{n-2};\\
&\ldots\\
&d_n\left[R^{(n-1)}\left(0\right)-R^{(n-1)}\left(T\right)\right]+\cdots+d_1\left[R\left(0\right)-R\left(T\right)\right]=k_0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Условий (25) достаточно для нахождения решения (24). Так, если все корни γ_r полинома $D(p)$ простые, то

$$R=\sum_{r=1}^{n}C_r e^{\gamma_r u},$$

и соответственно

$$R^{(s)}\left(0\right)-R^{(s)}\left(T\right)=\sum_{r=1}^{n}\gamma_r^s C_r\left(1-e^{\gamma_r T}\right). \tag{26}$$

Подставив теперь (26) в (25), найдем произвольные постоянные C_r. Умножив первое из уравнений (25) на γ_q^{n-1}, второе на γ_q^{n-2} и т. д., и просуммировав их, получим в левой части при C_q коэффициент

$$\left(1-e^{\gamma_q T}\right)\left[nd_n\gamma_q^{n-1}+\left(n-1\right)d_{n=1}\gamma_q^{n-2}+\cdots+d_1\right]=D'\left(\gamma_q\right)\left(1-e^{\gamma_q T}\right),$$

при C_r, $r \neq q$ коэффициент

$$\left(1-e^{\gamma_q T}\right)\left[d_n\left(\gamma_q^{n-1}+\gamma_r\gamma_q^{n-2}+\cdots+\gamma_r^{n-1}\right)+\right.$$

$$\left.+d_{n-1}\left(\gamma_q^{n-2}+\cdots+\gamma_r^{n-2}\right)+\cdots+d_1\right]=\frac{1-e^{\gamma_q T}}{\gamma_q-\gamma_r}\left[D\left(\gamma_q\right)-D\left(\gamma_r\right)\right]=0,$$

а в правой части — величину

$$k_{n-1}\gamma_q^{n-1}+k_{n-2}\gamma_q^{n-2}+\cdots+k_0=K\left(\gamma_q\right).$$

Отсюда непосредственно имеем

$$C_q=\frac{K\left(\gamma_q\right)}{D'\left(\gamma_q\right)\left(1-e^{\gamma_q T}\right)}$$

и вновь получаем формулу (16), которая, очевидно, справедлива только при $0 < u < T$; для промежутка $-T < u < 0$, продолжая функцию периодически, будем иметь

$$R(u)=\sum_{r=1}^{n}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}\frac{e^{\gamma_r(u+T)}}{\left(1-e^{\gamma_r T}\right)},$$

а при $u = 0$ и $u = T$, как уже отмечалось,

$$R(u)=0,5\sum_{r=1}^{n}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}\frac{1+e^{\gamma_r T}}{1-e^{\gamma_r T}}=-0,5\sum_{r=1}^{n}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}cth\frac{\gamma_r T}{2}. \quad (27)$$

Остановимся еще на случае, когда знаменатель передаточной функции линейной части системы имеет нулевой корень

$$D(0)=0. \quad (28)$$

Формально выражение для ряда $R(u)$ в этом случае можно получить, устремив в (16) $\gamma_1 \to 0$. Однако, поскольку уравнение (28) охватывает ряд практически важных систем, в частности, многие системы автоматической оптимизации, рассмотрим его несколько подробнее, обратившись вновь к выводу эквивалентного интегрального уравнения.

Подстановка ряда Фурье (18) в (1) дает в этом случае разложение для решения $x(t)$ в виде

$$x(t)=f(t)+x_0+\frac{2}{T}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^T\big[\operatorname{Re}W(ij\omega)\cos j\omega(t-\tau)-$$
$$-\operatorname{Im}W(ij\omega)\sin j\omega(t-\tau)\big]y(\tau)\,d\tau,$$

где x_0 — постоянная составляющая, которая должна быть определена из условия отсутствия постоянной составляющей в производной $px(t)$. Последнее условие может быть записано в виде

$$f_0+k_0\int_0^T F\left[x(\tau)\right]d\tau=0, \quad (29)$$

где $f_0=\int_0^T f(t)dt$ — постоянная составляющая возмущающей функции.

Таким образом, искомое периодическое решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t)=f(t)+x_0+\int_0^T R(t-\tau)F\left[x(\tau)\right]d\tau \quad (30)$$

с учетом условия (29). При этом ядро $R(u)$ выражается рядом Фурье (21), но без постоянной составляющей.

Если нулевой корень полинома $D(p)$ простой, т. е.

$$D(p) = p\bar{D}(p), \quad \bar{D}(0) = d_1 \neq 0,$$

то, разлагая дробь $W(p) = \dfrac{K(p)}{D(p)}$ на два слагаемых:

$$\frac{K(p)}{D(p)} = \frac{k_0}{d_1 p} + \frac{\bar{K}(p)}{\bar{D}(p)}, \quad \bar{K}(p) = \frac{d_1 K(p) - k_0 \bar{D}(p)}{d_1 p},$$

имеем

$$\begin{gathered} R(u) = -\frac{K(0)}{Td_1} + \frac{2}{T}\left\{\frac{K(0)}{2d_1} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{\infty}\left[\operatorname{Re}\frac{\bar{K}(ij\omega)}{\bar{D}(ij\omega)}\cos j\omega u - \operatorname{Im}\frac{\bar{K}(ij\omega)}{\bar{D}(ij\omega)}\sin j\omega u\right]\right\} + \\ + \frac{2k_0}{Td_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin j\omega u}{j\omega} = \sum_{r=1}^{n-1}\frac{\bar{K}(\gamma_r)}{\overline{D'}(\gamma_r)}\frac{e^{\gamma_r u}}{1-e^{\gamma_r T}} + \frac{2k_0}{Td_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin j\omega u}{j\omega} - \frac{\bar{K}(0)}{Td_1}. \end{gathered} \tag{31}$$

Но при $0 < u < T$ сумма ряда в (31) равна

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin j\omega u}{j\omega} = \frac{T}{4} - \frac{u}{2}.$$

Далее,

$$\frac{\bar{K}(\gamma_r)}{\overline{D'}(\gamma_r)} = \frac{d_1 K(\gamma_r) - k_0 \bar{D}(\gamma_r)}{d_1 \gamma_r \overline{D'}(\gamma_r)} = \frac{K(\gamma_r)}{\gamma_r \overline{D'}(\gamma_r)} = \frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}.$$

Наконец по правилу Лопиталя

$$\bar{K}(0) = \frac{d_1 K'(0) - k_0 \overline{D'}(0)}{d_1} = \frac{d_1 k_1 - k_0 d_2}{d_1}.$$

Сделав соответствующие подстановки в (31), получим окончательно

$$R(u) = \sum_{r=1}^{n-1}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}\frac{e^{\gamma_r u}}{1-e^{\gamma_r T}} + \frac{k_0}{2d_1} - \frac{1}{T}\left(\frac{k_0 u + k_1}{d_1} - \frac{k_0 d_2}{d_1^2}\right). \tag{32}$$

Аналогично в случае двойного нулевого корня при $D(p) = p^2\bar{D}(p)$, будем иметь

$$\begin{gathered} R(u) = \sum_{r=1}^{n-2}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}\frac{e^{\gamma_r u}}{1-e^{\gamma_r T}} - \frac{k_0 T}{12 d_2}\left[6\left(\frac{u}{T}\right)^2 - 3\frac{u}{T} + 1\right] + \\ + \frac{k_1 d_2 - k_0 d_3}{d_2^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{u}{T}\right) - \frac{k_2 d_2^2 - k_0 d_4 d_2 - k_1 d_3 d_2 + k_0 d_3^2}{d_2^3 T}. \end{gathered} \tag{33}$$

Отметим важное для приложений обстоятельство: если известно, что функция $F[x(\tau)]$ не содержит каких-либо гармоник, то соответствующие слагаемые без нарушения справедливости уравнения (20) могут быть опущены (или добавлены с произвольными коэффициентами) и в ядре (21). Отсюда, во-первых, следует, что для задач, в которых $F[x(\tau)]$ не содержит постоянной составляющей (в частности, при $f_0 = 0$ и нейтральной линейной части) к $R(u)$ можно добавить произвольное постоянное слагаемое R_0. Во-вторых, в симметричных задачах, для которых

$$x\left(t+\frac{T}{2}\right)=-x(t), \tag{34}$$

в решении отсутствуют все четные гармоники и, следовательно, вместо (21) можно использовать ядро

$$R_*(u)=\frac{2}{T}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\operatorname{Re}W(ij\omega)\cos j\omega u-\operatorname{Im}W(ij\omega)\sin j\omega u\right],\quad j=2l+1. \tag{35}$$

Нетрудно убедиться, что

$$R_*(u,\omega)=R(u,\omega)-0,5R(u,2\omega)=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{K(\gamma_r)e^{\gamma_r u}}{D'(\gamma_r)}\left[\frac{1}{1-e^{\gamma_r T}}-\frac{1}{2\left(1-e^{\frac{\gamma_r T}{2}}\right)}\right]= \tag{36}$$

$$=0,5\sum_{r=1}^{n}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}\frac{e^{\gamma_r u}}{1+e^{\frac{\gamma_r T}{2}}},\quad 0<u<\frac{T}{2}.$$

Во втором полупериоде при $\frac{T}{2}<u<T$ ядро симметрично

$$R_*\left(u+\frac{T}{2}\right)=-R_*(u). \tag{37}$$

При $u = 0$ и $u = T$ ряд Фурье по-прежнему будет сходиться к полусумме

$$R(0)=R(T)=\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{n}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}\frac{1-e^{\frac{\gamma_r T}{2}}}{1+e^{\frac{\gamma_r T}{2}}}=-\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{n}\frac{K(\gamma_r)}{D'(\gamma_r)}th\frac{\gamma_r T}{4}. \tag{38}$$

В симметричных задачах в уравнении (20) можно выполнять интегрирование за полпериода, от 0 до $T/2$, но тогда коэффициент 0,5 в выражении (36) следует опускать.

В заключение заметим, что во многих случаях при преобразовании исходной системы дифференциальных уравнений динамики к эквивалентному интегральному уравнению полезна замена переменной, т. е. выделение линейной части и нелинейности. Именно, полагая

$$y = y_* + kx \tag{39}$$

и подставив в (2), получим

$$x = W(p)y_* + kW(p)x + f.$$

Следовательно, вместо (1) и (2) будем иметь аналогичную систему уравнений

$$x = W_*(p)y_* + f_*, \tag{40}$$

$$y = F_*(x), \tag{41}$$

где

$$W_*(p) = \frac{W(p)}{1 - kW(p)} = \frac{K(p)}{D(p) - kK(p)},$$

$$f_* = \frac{f}{1 - kW(p)}, \quad F_*(x) = F(x) - kx.$$

Варьируя величину линейного поворота *k*, можно выбрать ее значение, оптимальное для тех или иных оценок. В частности, таким образом всегда удается обеспечить условие нерезонансности, т. е. $D_*(i\,\omega) \neq 0$.

Выводы. Таким образом, рассмотрены пригодные для практического применения способы формирования интегральных динамических моделей систем регулирования в виде интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма второго рода. При этом уравнение Вольтерра получим структурным способом при произвольном виде линейной части системы. Уравнение Фредгольма, отображающее периодические режимы, получены способом частотного анализа с возможностью исследования и учета различных динамических свойств линейной части и характера нелинейности системы.

Список использованной литературы:

1. Теория автоматического управления: учебник / под ред. Ю. М. Соломенцева. — 4-е изд., стер. — М. : Высшая школа, 2003. — 268 с.: ил.
2. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1975. — 568 с.
3. Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. — М. : Изд-во «Факториал Пресс», 2000. — 384 с.
4. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 542 с.
5. Васильева А. Б. Интегральные уравнения / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов. — 2-е изд., стереот. — М. : Физматлит, 2002. — 160 с.

Discusses methods of forming integral dynamic models of nonlinear systems of regulation. Including the structural method of producing a nonlinear integral equation of Voltaire II types and frequency methods of forming patterns in the form of a nonlinear integral equation of Fredholm type with the operator Hammerstein, showing periodic modes of the system of regulation.

Key words: *dynamic systems, control systems, integral equations.*

Отримано: 11.03.2015

УДК 004.94

В. А. Іванюк, канд. техн. наук,
В. В. Понеділок, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПОБУДОВА ЯДЕР ІНТЕГРАЛЬНОГО РЯДУ ВОЛЬТЕРРИ МЕТОДОМ АПРОКСИМАЦІЇ ФІГУРОЮ ОБЕРТАННЯ

Розглянуто підхід до побудови математичних моделей у вигляді інтегрального ряду Вольтерри на основі застосування методу апроксимації функцій багатьох змінних фігурою обертання. Досліджено за допомогою обчислювальних експериментів точність та швидкодію запропонованого способу.

Ключові слова: *апроксимація, функції багатьох змінних, нелінійні динамічні системи, ядра Вольтерри, Matlab / Simulink.*

Вступ. Для розв'язування задач проектування, контролю, аналізу та управління технологічними процесами необхідно виявляти взаємозв'язки між параметрами і представляти їх у вигляді математичних залежностей. Однак при отриманні формалізованого опису багатьох процесів наштовхуються на ряд труднощів, пов'язаних зі специфічними особливостями цих процесів, зокрема, великою кількістю показників і впливів, що визначають зміну цих показників, динамічний характер змін, наявність помилок при реєстрації параметрів, нелінійністю об'єктів тощо. У зв'язку з широким розвитком автоматизованих систем керування і проектування, завдання подання експериментальних даних компактними математичними залежностями стає особливо актуальним, оскільки їх використання призводить до суттєвої економії часу розрахунку та зменшенню вимог до апаратної й програмної складових обчислювальних комплексів.

Одним із ефективних підходів для опису нелінійних динамічних об'єктів є інтегро-степеневі ряди Вольтерри. При такому описі нелінійні і динамічні властивості системи повністю характеризуються послідовністю багатовимірних вагових функцій ядер Вольтерри. Задача побудови

