

2. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро- дифференциальных уравнений / В. Вольтерра ; под ред. П. И. Кузнецова ; пер. с англ. — М. : Наука, 1982. — 304 с.
3. Іванюк В. А. Комп'ютерна реалізація детермінованого способу ідентифікації інтегральних моделей нелінійних динамічних об'єктів / В. А. Іванюк, В. В. Понеділок, В. А. Гришук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 59–67.
4. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран ; пер. с франц. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
5. Павленко В. Д. Идентификация нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерры на основе данных измерений импульсных откликов / В. Д. Павленко // Электронное моделирование. — 2010. — Т. 32. — № 3. — С. 3–18.

The approach to mathematical modeling as integral Volterra series based on the application of the method of approximation of functions several variables rotation figure. Investigated by means numerical experiments quality of the proposed approach.

Key words: *approximation, the function of many variables, nonlinear dynamical systems Volterra kernel, Matlab / Simulink.*

Отримано: 15.04.2015

УДК 004.421:519.64

Г. О. Кисельова, старший викладач,

В. Б. Кисельов, асистент

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

ІТЕРАЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ВОЛЬТЕРРИ ІІ РОДУ В СЕРЕДОВИЩІ МАТЛАВ

Розглянуто питання чисельного розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри-Урисона та Вольтерри-Гаммерштейна ІІ роду методом простих ітерацій. Запропоновано рекурентні алгоритми реалізації методу простих ітерацій з використанням формул Ньютона-Котеса підвищеної точності.

Ключові слова: *нелінійні інтегральні рівняння, квадратурні формули, чисельні методи, ітерації, алгоритм, MatLab.*

Вступ. Застосування нелінійних інтегральних рівнянь є одним з найефективніших методів обчислення задач багатьох областей природничих наук, але розв'язування аналітичними методами можливе лише в деяких окремих випадках. Тому для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь використовують чисельні методи. Одним із

способів чисельного розв'язування нелінійних рівнянь Вольтерри II роду є метод простих ітерацій із застосуванням квадратурних алгоритмів, в основу яких покладені формули трапецій або прямокутників [1–4]. Основними перевагами подібних алгоритмів є простота та універсальність, тобто можливість розв'язувати інтегральні рівняння, як при рівномірному, так і при нерівномірному розташуванні вузлів.

Постановка проблеми. Формули трапецій та прямокутників мають невисоку точність (порядку $O(h^2)$), що, в свою чергу, впливає на величину похибки квадратурних алгоритмів, які використовують подібні формули. Специфікою обчислень інтегральних рівнянь Вольтерри за допомогою квадратурних формул є необхідність використання для кожного наступного кроку результатів, які отримані при попередніх розрахунках, тому має місце накопичення похибки, яка може збільшуватися і при зменшенні кроку обчислень. Величина похибки також збільшується при збільшенні проміжку інтегрування, враховуючи це, виникає необхідність використання, при розв'язуванні інтегральних рівнянь чисельними методами, формул високої алгебраїчної точності [1]. Для обчислень з постійним кроком використовуються формули Ньютона-Котеса.

Мета. Створити універсальний алгоритм розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з використанням формул Ньютона-Котеса високої алгебраїчної точності.

Шляхи вирішення проблеми. Метод простих ітерацій у застосуванні до чисельних розв'язань нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри-Урисона та Вольтерри-Гаммерштейна II роду полягає в отриманні послідовності функцій (наближень) $y_r(x)$, $r = 0, 1, 2, \dots, N$, де N — кількість ітерацій, за допомогою рекурентних формул

$$y_r = f(x) + \int_a^x K[x, s, y_{r-1}(s)] ds, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

для нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри-Урисона та

$$y_r = f(x) + \int_a^x K(x, s) F[y_{r-1}(s)] ds, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

для нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри-Гаммерштейна II роду.

Якщо розглядати рівняння (2), як окремий випадок рівняння (1) та позначити

$$y_0 = f(x),$$

то

$$y_1 = f(x) + \int_a^x K[x, s, y_0(s)] ds,$$

.....

$$y_N = f(x) + \int_a^x K[x, s, y_{N-1}(s)] ds.$$

Ітераційний процес, зазвичай, закінчується, коли

$$\frac{\|y_N - y_{N-1}\|}{\|y_N\|} \leq \varepsilon, \tag{3}$$

де $\|y\| = \max_{a < x < b} |y(x)|$, ε — задана відносна похибка.

При чисельній реалізації методу простих ітерацій інтеграл обчислюється за допомогою квадратурних формул [1–3]. При чисельному розв'язанні рівнянь Вольтерри II роду змінні межі інтегрування фіксуються, що дає можливість використовувати формули наближеного обчислення визначених інтегралів, які, в загальному випадку, мають вигляд

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \varphi(x_i) + R[\varphi], \tag{4}$$

де x_i — фіксовані абсциси проміжку $[a, b]$, або вузли інтегрування; A_i — чисельні коефіцієнти; $R[\varphi]$ — залишок (похибка квадратурної формули).

Для розв'язування лінійного інтегрального рівняння Вольтерри II роду методом квадратур використовується вираз [1]:

$$y(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, s) y(s) ds = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

де x_i — вузли інтегрування; $K(x_i, s)$ — значення ядра інтегрального рівняння у вузлах інтегрування; $f(x_i)$ — значення правої частини інтегрального рівняння у вузлах інтегрування; $y(x_i)$ — значення шуканої функції у вузлах інтегрування.

Для розв'язування нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри-Урисона II роду з урахуванням (1), вираз (5) приймає вигляд:

$$y_r(x_i) - \int_a^{x_i} K[x_i, s, y_{r-1}(s)] ds = f(x_i), \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad i = \overline{1, n}, \tag{6}$$

де $y_0(x_i) = f(x_i)$.

Приймаючи значення x_i в якості вузлів квадратурної формули та замінюючи за її допомогою інтеграл кінцевою сумою, отримуємо систему:

$$y_0(x_i) = f(x_i);$$

$$y_r(x_i) - \sum_{j=1}^i A_j \cdot K[x_i, x_j, y_{r-1}(x_j)] = f(x_i) + R_i[y], \quad r=1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

де x_i — вузли інтегрування; $K[x_i, x_j, y_{r-1}(x_j)]$ — значення ядра інтегрального рівняння у вузлах інтегрування; A_j — чисельні коефіцієнти; $f(x_i)$ — значення правої частини інтегрального рівняння у вузлах інтегрування; $R_i[y]$ — залишок (похибка квадратурної формули); $y_r(x_i)$ — значення шуканої функції у вузлах інтегрування.

Нехтуючи величиною похибки $R_i[y]$ та приймаючи позначення

$$y_r(x_i) = y_i; \quad f(x_i) = f_i; \quad K[x_i, x_j, y_{r-1}(x_j)] = K_{(r-1)_{ij}}, \quad (8)$$

отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка може бути приведена до вигляду

$$-\sum_{j=1}^i A_j \cdot K_{(r-1)_{ij}} + y_i = f_i, \quad i = \overline{1, n},$$

звідки отримуємо рекурентну формулу для визначення y_i :

$$y_i = f_i + \sum_{j=1}^i A_j \cdot K_{(r-1)_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Особливістю чисельного розв'язування інтегральних рівнянь за даною методикою є необхідність визначення y_i при будь-якому значенні $i = \overline{2, n}$, що не створює проблем при застосуванні формул трапецій та прямокутників, чим і обумовлене таке поширення даних методів, але при обчисленнях з постійним кроком із застосуванням формул Ньютона-Котеса вищої точності виникають труднощі, пов'язані з можливістю обчислювати значення інтегралів лише при i , значення яких залежать від кількості точок апроксимації застосовуваної формули. Так, для формули Сімпсона (трьохточкова апроксимація) обчислення можливе лише при

$$i = 2 \cdot z + 1, \quad z = 1, 2, 3, \dots$$

для формули Буля (чотирьохточкова апроксимація) — при

$$i = 3 \cdot z + 1, \quad z = 1, 2, 3, \dots$$

або, в загальному випадку,

$$i = (m-1) \cdot z + 1, \quad z = 1, 2, 3, \dots,$$

де m — кількість точок апроксимації застосованої формули. Тому використання формул Ньютона-Котеса вищої точності при розв'язанні інтегральних рівнянь Вольтерри можливе лише при комбінації з іншими методами, або сумісному застосуванні формул різної точності, при

цьому значення y_2 розраховується лише за формулами трапецій або прямокутників, значення y_3 — за формулою Сімпсона, і т.д.

При сумісному застосуванні формул різної точності, проміжок інтегрування розбивається на дві частини: перша (основна) обчислюється за формулою заданої (вищої) точності, а друга (залишкова) — за формулами меншої точності. Вираз (4) приймає вигляд

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^{n-c} A_i \cdot \varphi(x_i) + \sum_{i=c}^n A_i \cdot \varphi(x_i) + R[\varphi]. \quad (10)$$

Враховуючи (9) та (10), отримуємо рекурентну формулу для визначення y_r при сумісному застосуванні формул різної точності

$$y_r = f_i + \sum_{j=1}^c A_j \cdot K_{(r-1)_j} + \sum_{j=c}^i A_j \cdot K_{(r-1)_j}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

де $c = (m-1) \cdot z + 1$, $z = 1, 2, 3, \dots$, m — кількість точок апроксимації застосованої формули.

Алгоритм чисельного розв'язування рівняння Вольтерри II роду за формулами Ньютона-Котеса вищої точності приведено в [8]. Даний алгоритм може бути застосований і для чисельного розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри-Урсона та Вольтерри-Гаммерштейна II роду методом простих ітерацій. Блок-схему алгоритму з урахуванням отриманих рекурентних формул (10) приведено на рис. 1.

Отримані результати. Використовуючи отримані формули та розрахунковий алгоритм, в програмі MATLAB розроблено програму `voltiternew` (з використанням формул Ньютона-Котеса різної точності), в основу якої покладено метод простих ітерацій та розроблений алгоритм від двох- до дев'ятиточкової формули Ньютона-Котеса.

В програмі `voltiternew` передбачена можливість вибору методу розв'язку від формули трапецій до дев'ятиточкової формули Ньютона-Котеса, що підвищує універсальність даного алгоритму та надає змогу відслідковувати зміну величини похибки від точності апроксимуючої формули.

Звернення до програми `voltiternew` аналогічне зверненню до програми `voltnew` [8]. Основна відмінність, це необхідність задавати величину похибки ітерацій і можливість отримати дані про кількість ітерацій та точок апроксимації для отримання необхідної точності:

`[yi, iter, n, xi]=voltiternew(prav, kern, a, b, h, tol, met)`

де y_i — розв'язок інтегрального рівняння; x_i — вузли інтегрування; $iter$ — кількість ітерацій; n — кількість точок апроксимації; `prav` — права частина інтегрального рівняння; `kern` — ядро інтегрального рівняння; a , b — межі інтегрування; h — крок інтегрування; `met` — метод інтегрування (кількість точок апроксимуючої формули від «2» до «9»).

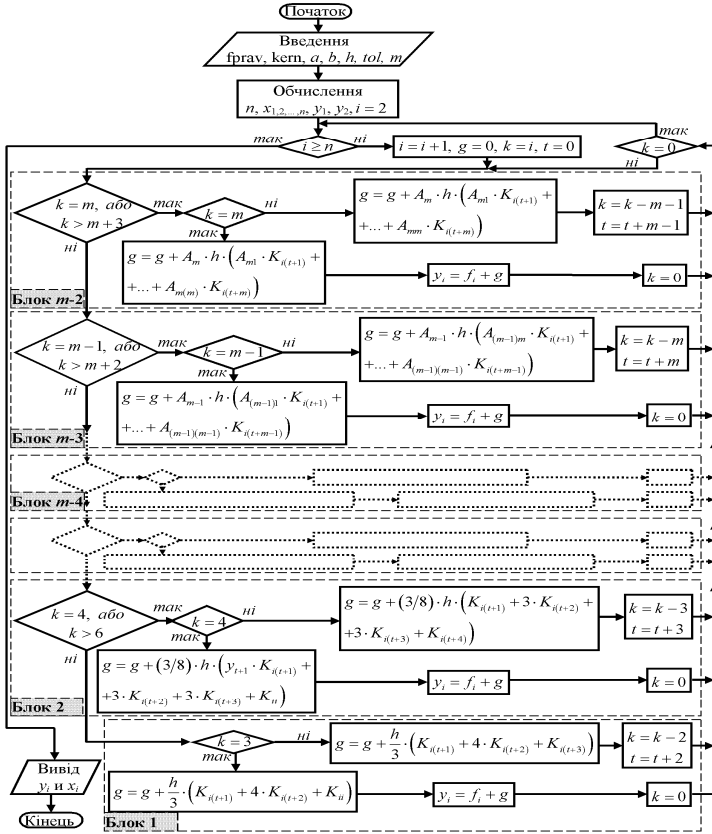


Рис. 1. Блок-схема алгоритму для чисельного розв'язування нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри II роду за формулами Ньютона-Котеса

Тест програм. Для порівняння ефективності використання формул Ньютона-Котеса різної точності при розв'язанні нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду, розв'язуємо за їх допомогою кілька прикладів [1], які мають точні розв'язки, та визначаємо похибку розв'язку. Наводимо ці приклади.

Приклад 1 (приклад 1.8 [1]):

$$y(x) + \int_0^x \frac{\cos^2(s)}{\cos(x)} y^2(s) ds = \frac{1}{\cos x};$$

точний розв'язок:

$$y(x) = \frac{1}{(x-1) \cdot \cos(x)}.$$

Приклад 2 (приклад 1.23 [1]):

$$y(x) - \int_0^x \left[\frac{y(s)}{s+1} - \frac{s+1}{y(s)} \right] ds = 2;$$

точний розв'язок:

$$y(x) = (x+1) \cdot \sqrt{4 - 2 \cdot \ln(x+1)}.$$

Абсолютна похибка розв'язку Δ_{abs} визначається як модуль різниці між точним значеннями інтегрального рівняння $y_m(x)$ та наближеними $y_n(x)$, розрахованими відповідним чисельним методом

$$\Delta_{abs} = |y_m(x) - y_n(x)|.$$

Отримані результати розв'язку прикладів 1 та 2 для максимальних значень $\max \Delta_{abs}$ похибки, при різних проміжках інтегрування та величинах кроку h , зведені в таблицю 1. Поведінку похибки Δ_{abs} зображено на рис. 2. Приклад 1 тестовано на проміжку [2; 7], а приклад 2 — на проміжку [0; 5].

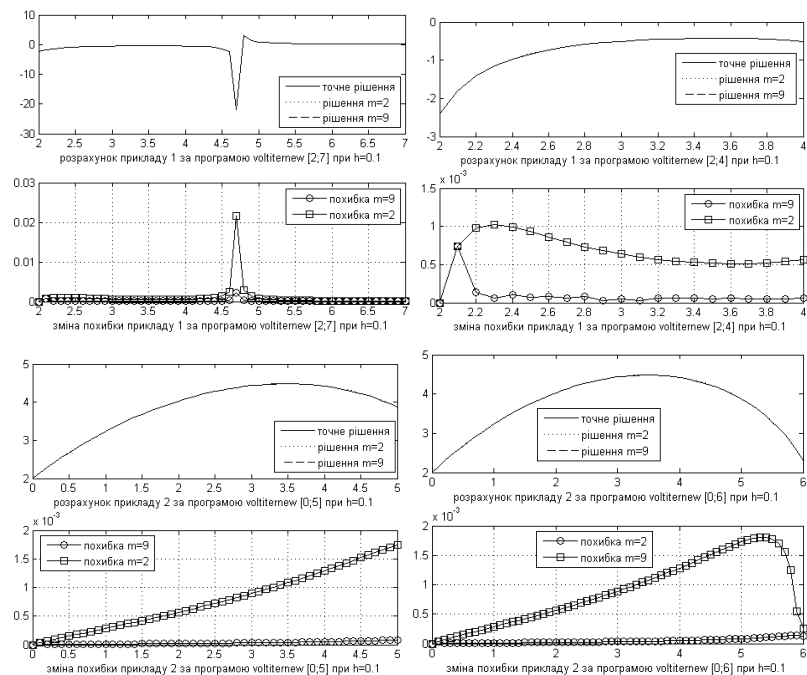


Рис. 2. Графіки функцій $y(x)$ та похибок Δ_{abs} для прикладів 1, 2

Таблиця 1

| № з/п | № прикладу | похибка ітерацій | Крок, h | К-сть точок | Максимальна величина похибки розрахунку / кількість ітерацій | | | |
|-------|------------|------------------|-----------|-------------|--|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | | | | | Кількість точок апроксимації | | | |
| | | | | | 2 | 5 | 7 | 9 |
| 1 | Приклад 1 | 10^{-4} | 0.1 | 51 | $2 \cdot 10^{-2} / 4$ | $1 \cdot 10^{-3} / 4$ | $1 \cdot 10^{-3} / 4$ | $2 \cdot 10^{-3} / 4$ |
| 2 | | 10^{-4} | 0.05 | 101 | $5 \cdot 10^{-3} / 4$ | $1 \cdot 10^{-4} / 4$ | $1 \cdot 10^{-4} / 4$ | $1 \cdot 10^{-4} / 4$ |
| 3 | | 10^{-4} | 0.01 | 501 | $1 \cdot 10^{-3} / 3$ | $2 \cdot 10^{-6} / 3$ | $2 \cdot 10^{-6} / 3$ | $2 \cdot 10^{-6} / 3$ |
| 4 | | 10^{-6} | 0.01 | 501 | $1 \cdot 10^{-3} / 4$ | $1 \cdot 10^{-6} / 4$ | $1 \cdot 10^{-6} / 4$ | $1 \cdot 10^{-6} / 4$ |
| 5 | Приклад 2 | 10^{-4} | 0.1 | 51 | $2 \cdot 10^{-3} / 5$ | $7 \cdot 10^{-5} / 5$ | $7 \cdot 10^{-5} / 5$ | $8 \cdot 10^{-5} / 5$ |
| 6 | | 10^{-4} | 0.05 | 101 | $4 \cdot 10^{-4} / 4$ | $4 \cdot 10^{-6} / 4$ | $4 \cdot 10^{-6} / 4$ | $4 \cdot 10^{-6} / 4$ |
| 7 | | 10^{-4} | 0.01 | 501 | $1 \cdot 10^{-5} / 3$ | $2 \cdot 10^{-6} / 3$ | $2 \cdot 10^{-6} / 3$ | $1 \cdot 10^{-6} / 3$ |
| 8 | | 10^{-6} | 0.01 | 501 | $4 \cdot 10^{-5} / 4$ | $3 \cdot 10^{-8} / 4$ | $3 \cdot 10^{-8} / 4$ | $3 \cdot 10^{-8} / 4$ |

Висновки. Порівнюючи результати тестів, можна зробити висновок про високу стабільність та якість обчислень, проведених за допомогою програми *voltiternew*, в якій застосовані формули Ньютона-Котеса підвищеної точності. Використання дев'ятиточкової формули практично не покращує отримані результати, що пов'язане з особливостями даного алгоритму та використаних прикладів. Застосування формул Ньютона-Котеса вищої точності дає можливість будувати алгоритми для розв'язування лінійних та нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду чисельними методами, однак необхідно враховувати властивості ядра та правої частини рівнянь, а саме наявність похідних відповідних порядків. Метод послідовних наближень є достатньо ефективним для розв'язування нелінійних рівнянь Вольтерри II роду з використанням формул Ньютона-Котеса підвищеної точності.

Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 544 с.
2. Арушанян И. О. Численное решение интегральных уравнений методом квадратур. Практикум на ЭВМ / И. О. Арушанян. — М. : МГУ, 2002. — 72 с.
3. Манжиров А. В. Методы решения интегральных уравнений: Справочник / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. — М. : Факториал, 1999. — 272 с.
4. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : Наука, 2003.
5. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. — М. : Наука, 1982. — 238 с.

6. Клетков Ю. Л. MATLAB 7: программирование, численные методы / Ю. Л. Клетков, А. Ю. Клетков, М. М. Шульц. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 752 с.
7. Алексеев Е. Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9 / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. — М. : ИТ Пресс, 2006. — 496 с.
8. Ситник О. О. Універсальний алгоритм розрахунку інтегрального рівняння Вольтерри II роду із застосуванням формул Ньютона-Котеса / О. О. Ситник, Г. О. Кисельова, В. Б. Кисельов // Вісник ЧДТУ. — 2010. — № 3. — С. 36–42.

Considered the problem of numerical solution of nonlinear integral equations of Volteri-Lemma and Valteri-Hammerstein II by the method of simple iterations. The proposed recursive algorithms the implementation of the method of simple iterations using the formula of Newton-Cotes increased accuracy.

Key words: *nonlinear integral equations, quadrature formulae, numerical methods, iteration, algorithm, MatLab.*

Отримано: 17.02.2015

УДК 519.63

Ю. Є. Климяк, канд. техн. наук

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПОЛІВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ БАГАТОШАРОВИХ ФІЛЬТРІВ ІЗ КУСКОВО-ОДНОРІДНИМИ ПОРИСТИМИ ЗАВАНТАЖЕННЯМИ

Розроблено алгоритм числової побудови просторового фільтраційного поля у багатошарових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями, що мають форму двозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії та розділених деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами фільтрації. Наведено результати числових розрахунків і здійснено їх аналіз.

Ключові слова: *фільтраційне поле, алгоритм, фільтр, пористе завантаження.*

Вступ. При математичному моделюванні просторових процесів доочистки води шляхом фільтрування її через пористі завантаження виникає багато труднощів із врахуванням багатошаровості, багатозв'язності, повздовжніх і поперечних викривленостей області, в якій шукається розв'язок, складністю рівнянь у частинних похідних і граничних умов відповідних задач. У зв'язку із цим для випадків областей, обмежених екві- або квазіеквіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії, у рів-