УДК 519.6

А. А. Дячук*, канд. техн. наук, старший научный сотрудник,
В. А. Тихоход,** канд. техн. наук

* Институт экономики и прогнозирования НАН Украины, г. Киев,
** Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», г. Киев

ВЗАИМОСВЯЗЬ И ОСОБЕННОСТИ ВРЕМЕННОЙ И ЧАСТОТНОЙ ФОРМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В статье рассмотрены вопросы представления и взаимосвязи временных и частотных интегральных моделей, предоставляющие эффективный аппарат исследования характеристик динамических систем с переменными и постоянными параметрами.

Ключевые слова: *динамические системы, частотная форма интегральных моделей, временная форма интегральных моделей.*

Введение. По определению [1; 2], динамической называется система, состояние которой в момент времени $t + \Delta t$ обусловлено ее состоянием в предыдущий момент t. Из всего спектра математических моделей динамических систем существенное место занимают модели, характеризующиеся линейными дифференциальными или интегральными уравнениями. Эти уравнения позволяют исследовать динамические системы с постоянными или зависящими от времени параметрами. При этом интегральные динамические модели имеют ряд преимуществ по сравнению с дифференциальными [3], в частности — интегральный подход позволяет не учитывать начальные условия без привлечения специальных предположений о признаках уравнения или соображения о медленности изменения его коэффициентов, но и дает возможность связать ядро интегрального уравнения с импульсной реакцией системы. Поэтому важными являются вопросы всестороннего исследования особенностей разных представлений интегральных динамических моделей, их взаимосвязи, а также способов перехода от дифференциальных моделей к интегральным.

Особенности временной формы интегральных моделей динамических систем с переменными параметрами. Рассмотрим один из вариантов временного описания динамической системы, использующих такую ее характеристику, как импульсная реакция, которую можно получить, например, интегрированием равенства.

Общим уравнением описания поведения динамической системы является

$$y(t) = Lf(t), \tag{1}$$

в котором функция $f(t)$ характеризует входное воздействие (входной сигнал), $y(t)$ — реакцию (выходной сигнал) системы, а линейный оператор L определяется свойствами самой системы.

Учитывая зависимость

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \tag{2}$$

и подставляя ее в уравнение (1), получаем соотношение

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) L\delta(t-\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

в котором обозначим реакцию динамической системы на дельта-функцию

$$G(t,\tau) = L\delta(t-\tau)\,. \tag{4}$$

Очевидно, что соотношение (4) является частным случаем уравнения (1) при $f(\tau) = \delta(t - \tau)$. Реакция системы на такое воздействие называется функцией Грина.

С учетом обозначения (4) уравнение (3) принимает вид

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau) f(\tau)\,d\tau \tag{5}$$

и описывает реакцию системы на произвольное внешнее воздействие в том случае, когда известна функция Грина.

Функция Грина зависит от способа задания краевых условий. В частности, если эти условия заданы на концах интервала $a \le t, \tau \le b$, то выражение (5) принимает вид

$$y(t) = \int_{a}^{b} G(t,\tau) f(\tau)\,d\tau\,.$$

Если речь идет об изучении поведения системы при $0 \le t, \tau < \infty$, тогда равенство (5) записывается в следующей форме:

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} g(t,\tau) f(\tau)\,d\tau, \tag{6}$$

а функция $g(t, \tau)$ называется полной импульсной реакцией динамической системы с переменными параметрами [1].

Если исследуемая система имеет постоянные параметры, то вид ее импульсной реакции не зависит от момента приложения импульсного воздействия, что приводит к равенству

$$g(t,\tau) = g(t-\tau),$$

подстановка которого в выражение (6) приводит к интегралу свертки

$$y(t)=\int_0^\infty g(t-\tau)f(\tau)d\tau, \tag{7}$$

с помощью которого по известной импульсной реакции системы $g(t-\tau)$ можно определить ее реакцию на произвольное внешнее воздействие $f(\tau)$.

Необходимо отметить, что в выражениях (6), (7) отсутствуют начальные условия, которые учитываются иным способом. Известно, например, что если динамическая система описывается дифференциальным уравнением, решение которого характеризует ее поведение, то это решение содержит две компоненты — общую и частную. Общая зависит от некоторых постоянных, которые определяются через начальные условия, а частная учитывает реакцию на внешнее воздействие [1]. Таким образом, выражения (6) или (7) задают частную компоненту решения, а начальные условия входят в общую.

Отметим также, что условие перехода от уравнения (5) к уравнениям (6) и (7) было записано в виде $0\le t,\tau<\infty$. Однако следует учесть, что при изменении τ можно записать также условие $0\le\tau<t$, которое легко понять, рассматривая импульсную реакцию $g(t-\tau)$. В случае $\tau>t$ ее аргумент будет отрицательным. Однако эта ситуация противоречит физическому смыслу, требующему, чтобы до момента подключения внешнего воздействия реакция системы равнялась нулю. С учетом этого замечания равенство (7) имеет вид

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau, \tag{8}$$

который используют многие авторы. Однако в литературе встречается и форма (7), которую следует применять лишь с учетом сделанного замечания. Это же замечание относится и к выражению (6), где верхний предел нужно заменить на t.

Рассматривая далее формулы (6) и (8), следует обратить внимание на два обстоятельства.

Во-первых, аргументом функций, входящих в эти формулы, является время, и, следовательно, они осуществляют временное описание динамических систем.

Во-вторых, они позволяют сформулировать три основные проблемы анализа динамических систем: по импульсной реакции системы $g(t, \tau)$ и внешнему воздействию $f(\tau)$ найти реакцию $y(t)$; по импульсной реакции $\mathrm{g}(t, \tau)$ и реакции $y(t)$ восстановить неизвестное воздействие $f(\tau)$; найти импульсную реакцию системы $g(t, \tau)$.

Последняя проблема принципиально отличается от двух предыдущих, поскольку они могут быть решены только после ее решения.

Кроме того, без решения последней проблемы бессмысленны выражения (6) и (8), и возникает вопрос о целесообразности введения понятия импульсной реакции.

Вопросы преобразования дифференциальных уравнений к интегральным. Таким образом, мы подошли к вопросу о решении уравнений, описывающих динамическую систему с переменными параметрами, частным случаем которой является система с постоянными параметрами.

В качестве этих уравнений рассмотрим дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами и связанные с ними интегральные уравнения. Дифференциальные уравнения высокого порядка описывают динамические системы с одним входом и одним выходом. Решения таких уравнений связаны со значительными трудностями, вызванными, в частности, тем, что для уравнений с переменными коэффициентами не существует единого способа построения не только частной компоненты решения, зависящей от правой части, но и общей, содержащей начальные условия. Поэтому методы решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, за редким исключением, являются приближенными. Часто за основу приближенного метода принимают частные признаки уравнения или соображения о медленности изменения его коэффициентов. В то же время достаточно общим является метод сведения дифференциального уравнения к интегральному. Он позволяет не только учитывать начальные условия без привлечения специальных предположений, но и дает возможность связать ядро интегрального уравнения с импульсной реакцией системы. Этот метод также имеет модификации. Изложим один из его вариантов, который описан и последовательно применен к решению ряда прикладных задач механики [3].

Итак, пусть задано дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{q} a_{q-j}(t)\frac{d^j y}{dt^j} = f(t), \\ y_{(0)}^{(l)} = y_0^{(l)}, \quad l = \overline{0, q-1}.\end{gathered} \tag{9}$$

Обозначим

$$\frac{d^q y}{dt^q} = \varphi(t) \tag{10}$$

и проинтегрируем равенство (10).

В результате находим

$$\frac{d^{q-1} y}{dt^{q-1}} = \int_0^t \varphi(\xi) d\xi + y_0^{(q-1)}.$$

Интегрируя равенство (10) m раз, получаем соотношение

$$\frac{d^{q-m}y}{dt^{q-m}} = \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{m\ раз} \varphi(\xi)\,d\xi^m + \sum_{k=1}^{m} y_0^{(q-k)} \frac{t^{m-k}}{(m-k)!}. \qquad (11)$$

Отсюда легко получить выражение для решения уравнения (9) $y(t)$, полагая $t = q$.

Подставляя соотношение (11) в уравнение (9) и полагая $a_0(t) = 1$, получаем уравнение

$$\begin{gathered}\varphi(t) + a_1(t)\int_0^t \varphi(\xi)\,d\xi + a_2(t)\int_0^t\int_0^t \varphi(\xi)\,d\xi^2 + \ldots + \\ + a_q(t)\underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t}_{q\ раз} \varphi(\xi)\,d\xi^q + a_1(t)\,y_0^{(q-1)} + a_2(t)\,y_0^{(q-2)}t + \\ a_2(t)\,y_0^{(q-2)} + \ldots + a_q(t)\sum_{k=1}^{q} y_0^{(q-k)} \frac{t^k}{(q-k)!} = f(t).\end{gathered} \qquad (12)$$

Воспользуемся формулой приведения кратного интеграла:

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{m\ раз} \varphi(\xi)\,d\xi^m = \int_0^t \frac{(t-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (13)$$

Подставляя формулу (13) в уравнение (12), переписываем его в виде

$$\varphi(t) + \sum_{m=1}^{q} a_m(t)\int_0^t \frac{(t-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}\varphi(\xi)\,d\xi + \sum_{m=1}^{q}\sum_{k=1}^{m} y_0^{(q-k)} a_m(t)\frac{t^{m-k}}{(m-k)!} = f(t),$$

откуда следует равенство

$$\varphi(t) + \int_0^t \sum_{m=1}^{q} a_m(t)\frac{(t-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}\varphi(\xi)\,d\xi = F(t), \qquad (14)$$

в котором

$$F(t) = f(t) - \sum_{m=1}^{q}\sum_{k=1}^{m} y_0^{(q-k)} a_m(t)\frac{t^{m-k}}{(m-k)!}.$$

Здесь обозначим

$$\sum_{m=1}^{q} a_m(t)\frac{(t-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} = -\lambda K(t,\xi),$$

где $\lambda = \text{const}$.

С учетом этого окончательно придем к интегральному уравнению

$$\varphi(t) = F(t) + \lambda\int_0^t K(t,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad (15)$$

которое называется уравнением Вольтерра второго рода.

Алгоритм решения интегральных уравнений, описывающих динамическую систему с переменными параметрами. Решение уравнения (15) находим в виде

$$\varphi(t)=\varphi_0(t)+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\varphi_m(t). \tag{16}$$

Подставив выражение (16) в интегральное уравнение (15), получим равенство

$$\varphi_0(t)+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{m+1}\varphi_{m+1}(t)=F(t)+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{m+1}K(t,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{17}$$

в котором первая сумма согласована по индексам со второй.

Сравнивая в равенстве (17) слагаемые с одинаковыми степенями λ, получаем систему равенств

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(t)=F(t),\\
&\varphi_1(t)=\int_0^t K(t,\xi)\varphi_0(\xi)\,d\xi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_m(t)=\int_0^t K(t,\xi)\varphi_{m-1}(\xi)\,d\xi.
\end{aligned} \tag{18}$$

Последовательная подстановка каждого предыдущего равенства системы (18) в последующее порождает следующую систему:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t)=\int_0^t K(t,\xi)F(\xi)\,d\xi,\\
&\varphi_2(t)=\int_0^t K(t,\xi)\int_0^{\xi}K(\xi,\xi_1)F(\xi_1)\,d\xi\,d\xi_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_m(t)=\int_0^t K(t,\xi)\cdots\int_0^{\xi_{m-2}}K(\xi_{m-2},\xi_{m-1})F(\xi_{m-1})\times d\xi\ldots d\xi_{m-1}.
\end{aligned} \tag{19}$$

В системе уравнений (19) осуществим перестановку в соответствии с формулой Дирихле:

$$\int_a^b dy\int_a^y f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_x^b f(x,y)\,dy.$$

Тогда второе уравнение примет вид

$$\varphi_2(t)=\int_0^t F(\xi_1)\,d\xi_1\int_{\xi_1}^t K(t,\xi)K(\xi,\xi_1)\,d\xi$$

или

$$\varphi_2(t)=\int_0^t K_2(t,\xi)F(\xi)d\xi, \tag{20}$$

где

$$K_2(t,\xi_1)=\int_{\xi_1}^t K(t,\xi)K(\xi,\xi_1)d\xi. \tag{21}$$

Третье уравнение системы (19) с учетом равенств (20) и (21) можно записать так:

$$\varphi_3(t)=\int_0^t K(t,\xi)\varphi_2(\xi)d\xi=\int_0^t K(t,\xi)\int_0^{\xi} K_2(t,\xi_1)F(\xi_1)d\xi d\xi_1.$$

Полагая

$$K_3(t,\xi_1)=\int_{\xi_1}^t K(t,\xi)K_2(\xi,\xi_1)d\xi\ ,$$

аналогично предыдущему случаю получаем выражение

$$\varphi_3(t)=\int_0^t K_3(t,\xi)F(\xi)d\xi.$$

Результат дальнейших преобразований можно записать в виде

$$K_m(t,\xi_1)=\int_{\xi_1}^t K(t,\xi)K_{m-1}(\xi,\xi_1)d\xi, \tag{22}$$

принимая по определению

$$K(t,\xi)=K_1(t,\xi).$$

Уравнение (22) порождает систему уравнений

$$\begin{aligned}
&K_1(t,\xi)=K(t,\xi),\\
&K_2(t,\xi)=\int_{\xi_1}^t K(t,\xi)K_1(\xi,\xi_1)d\xi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&K_m(t,\xi)=\int_{\xi_1}^t K(t,\xi)K_{m-1}(\xi,\xi_1)d\xi.
\end{aligned} \tag{23}$$

Ядра $K_j(t, \xi)$, полученные путем последовательного вычисления при $j = 2, 3, ...$, называются итерированными ядрами. При этом каждая из функций $\varphi_m(t)$ определяется уравнением

$$\varphi_m(t)=\int_0^t K_m(t,\xi)F(\xi)d\xi. \tag{24}$$

Подстановка уравнения (24) в формулу (16) приводит к выражению

$$\varphi(t)=\varphi_0(t)+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\int_0^t K_m(t,\xi)F(\xi)d\xi,$$

которое с учетом первого уравнения системы (18) переходит в интегральное уравнение

$$\varphi(t)=F(t)+\lambda\int_0^t R(t,\xi)F(\xi)d\xi, \qquad (25)$$

ядро которого

$$R(t,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(t,\xi)$$

называется резольвентой.

Уравнение (25) является общей формой решения уравнения Вольтерра второго рода, а резольвента связана с полной импульсной реакцией выражением

$$R(t,\xi)=\frac{d^q g(t,\xi)}{dt^q}. \qquad (26)$$

Частотная форма интегральных моделей динамических систем с переменными параметрами. Рассмотрим теперь основные вопросы частотного описания. При этом вместо категорий «входное воздействие» и «реакция системы» будем оперировать их частотными спектрами соответственно $F(j\omega)$ и $Y(j\omega)$.

Частотным спектром функции времени $f(t)$ называется функция частоты

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (27)$$

В соответствии с определением (27) спектр дельта-функции

$$\Delta(j\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega\tau}. \qquad (28)$$

Легко видеть, что с учетом выражения (28) определение (27) следует непосредственно из равенства (2). Для получения частотного описания динамической системы необходимо преобразовать с помощью определения (27) уравнение системы (9). При этом сразу возникают два вопроса: чему равен спектр произведения двух функций времени и как вычислить спектр производных функции $y(t)$ по известному спектру этой функции $Y(j\omega)$.

Первый вопрос оказывается чрезвычайно сложным, и попытка применить частотное описание к исследованию динамических систем с переменными параметрами наталкивается на значительные трудности. В частности, динамическая система при этом характеризуется некоторой системной функцией $H(j\omega,t)$, зависящей от частоты ω и времени t. Уравнение же, решением которого является системная функция, оказывается также дифференциальным с переменными коэффициентами, и решить его, в общем случае, не легче, чем исходное уравнение (9). Поэтому частотное описание применяется в основном при исследовании динамических систем с постоянными параметрами. В дальнейшем, учитывая это, полагаем, что в выражении (9) $a_{q-j}(t) = a_{q-j} = const$.

Рассматривая второй вопрос, вычисляем спектры производных $Y^{(l)}(j\omega)$, применяя формулу (27). Так, для первой производной имеем выражение

$$Y'(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-j\omega t} dt. \qquad (29)$$

Беря интеграл (29) по частям, имеем

$$Y'(j\omega) = y(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt. \qquad (30)$$

Предположим, что первое слагаемое в выражении (30) равно нулю. Тогда это выражение принимает вид

$$Y'(j\omega) = j\omega Y(j\omega),$$

где по определению

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Аналогично получаем

$$Y''(j\omega) = j\omega Y'(j\omega) = (j\omega)^l Y(j\omega),$$

или, в общем случае,

$$Y^{(l)}(j\omega) = (j\omega)^l Y(j\omega). \qquad (31)$$

При выводе формулы (31) мы предполагали, что выполняются условия

$$y^{(m)} e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, m = \overline{0, l-1}, \qquad (32)$$

требующие равенства нулю функции $y(t)$ и всех ее производных до порядка $l-1$ включительно при $t \to \pm\infty$.

Функция $y(t)$ должна быть абсолютно интегрируема в бесконечных пределах. Условия (32) являются жесткими и позволяют вводить понятие спектра по формуле (27) лишь для непериодических функций. Это приводит к тому, что для частотного описания одной и той же динамической системы, находящейся под воздействием периодического и непериодического внешнего возмущения, приходится пользоваться различными и взаимно не сводимыми математическими выражениями.

Так, для периодических воздействий применяют разложение в тригонометрический ряд Фурье

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\Omega t+b_k\sin k\Omega t\right) \tag{33}$$

с коэффициентами

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,dt\,,$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos k\Omega t dt\,,$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin k\Omega t dt\,, \tag{34}$$

где $T=\Omega/2\pi$,

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\Omega t} \tag{35}$$

с комплексно сопряженными коэффициентами

$$C_k=\frac{a_k-jb_k}{2}\,,$$

$$C_k=\frac{a_k+jb_k}{2}\,. \tag{36}$$

Это обусловлено тем, что экспонента инвариантна по отношению к операциям дифференцирования и интегрирования, т.е. является собственной функцией соответствующих операторов.

Здесь следует отметить, что не любую периодическую функцию можно разложить в ряд (30) или (35), а лишь такую, которая удовлетворяет условиям Дирихле. В соответствии с этими условиями функция $f(t)$ должна иметь конечное число разрывов первого рода, т.е. конечных разрывов, и не должна иметь бесконечное число максимумов и минимумов на конечном отрезке.

На основании равенств (34) и (36) получим выражение для коэффициентов ряда (35)

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jk\Omega t}dt \tag{37}$$

и сравним его с формулой (27).

При этом легко наблюдать аналогию и различия. Так, очевидна единая структура этих формул, что позволяет считать набор коэффициентов C_k спектром периодической функции $f(t)$ по аналогии со спектром $F(j\omega)$ непериодической функции.

Вместе с тем спектр $F(j\omega)$ определен на всей оси частот $-\infty < \omega < \infty$, тогда как спектр C_k — лишь для фиксированных кратных частот $\Omega, 2\Omega, 3\Omega, \ldots$ Чтобы различать эти спектры, не употребляя слов периодическая и непериодическая функция, функцию $F(j\omega)$ называют сплошным спектром или спектральной плотностью, а набор коэффициентов C_k — линейчатым спектром.

Очевидно, что в ряд Фурье можно раскладывать и непериодическую функцию, заданную на интервале $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ или любом другом конечном интервале. Однако в результате замены функции рядом Фурье она периодически повторяется при $-\infty < t < \infty$.

Теперь можно высказать еще одно очевидное замечание о невозможности перехода от представления вида (35) к представлению вида (27), так как линейчатый спектр, которому соответствует решетчатая функция со значениями C_k, не содержит информации о характере сплошного спектра $F(j\omega)$, которому соответствует непрерывная функция, для бесконечного множества частот $\omega \ne \Omega, 2\Omega, 3\Omega, \ldots$

И наконец, возвращаясь к выражениям (27) и (37), записываем для непериодического случая формулу, соответствующую формуле (35):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \tag{38}$$

которая вместе с формулой (27) образует пару преобразований Фурье. Это означает, что выполняется тождество

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt d\omega.$$

Частотная форма интегральных моделей динамических систем с постоянными параметрами. Теперь перейдем к вопросу о характеристике динамической системы в частотной области, полагая, что параметры системы со временем не меняются. При этом, как следует из сказанного выше, необходимо различать случай непериодического и периодического внешнего воздействия.

Итак, пусть функция $f(t)$, задающая непериодическое внешнее воздействие, удовлетворяет всем необходимым условиям и ей соответствует частотный спектр (27). Поскольку динамическая система описывается уравнением (9), то при нулевых начальных условиях и $a_l(t) = \text{const}$, результат преобразования этого уравнения может быть представлен в виде

$$\sum_{l=0}^{q} a_l Y^{(l)}(j\omega) = F(j\omega) . \tag{39}$$

Полагая, что условия (32) выполнены, и учитывая выражение (31), переписываем равенство (39) в виде

$$\left[\sum_{l=0}^{q} a_l (j\omega)^l\right] Y(j\omega) = F(j\omega),$$

откуда получаем выражение, связывающее спектры входного воздействия и реакции системы

$$Y(j\omega) = K(j\omega) F(j\omega), \tag{40}$$

в котором зависящая от частоты характеристика динамической системы называется ее комплексным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = \frac{1}{\sum_{l=0}^{q} a_l (j\omega)^l} . \tag{41}$$

Выражение (40) позволяет при известном комплексном коэффициенте передачи $K(j\omega)$ вычислять спектр реакции динамической системы $Y(j\omega)$ по спектру входного воздействия $F(j\omega)$.

Рассмотрим комплексный коэффициент передачи с физической точки зрения. Для этого положим, что на динамическую систему действует сигнал в виде дельта-функции, т.е. $f(t) = \delta(t)$. Тогда сигнал на ее выходе будет определять импульсную реакцию, т.е. $y(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \bar{C}_k e^{jk\Omega t}$.

Следовательно, в этом случае выражение (40) примет вид

$$G(j\omega) = K(j\omega) \Delta(j\omega),$$

где $G(j\omega)$ — спектр импульсной реакции $g(t)$; $\Delta(j\omega)$ — дельта-функции $\delta(t)$.

В соответствии с равенством (28) при C_k

$$\Delta(j\omega) = \Delta(j\omega, 0) = 1 .$$

Следовательно

$$G(j\omega) = K(j\omega).$$

Другими словами

$$\bar{C}_k = \frac{C_k}{\sum_{l=0}^{q} a_l (jk\Omega)^l} . \tag{42}$$

А на основании формулы (38) имеем

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{-j\omega t}dt\,. \tag{43}$$

Формулы (42), (43) позволяют перейти от временного описания динамической системы с постоянными параметрами к частотному и обратно. Из них же следует эквивалентность этих описаний.

Вычислим теперь реакцию динамической системы на периодическое воздействие вида (35). Поскольку система линейна и для нее справедлив принцип суперпозиции, достаточно рассмотреть ее реакцию $y_k(t)$ на одну составляющую $f_k(t) = C_k e^{jk\Omega t}$, а затем вычислить сумму

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\,.$$

Известно, что при воздействии гармонического сигнала на систему с постоянными параметрами частота Ω его не меняется, а изменяются лишь амплитуда и фаза, что приводит к изменению комплексной амплитуды C_k .

Следовательно, при воздействии сигнала $f_k(t) = C_k e^{jk\Omega t}$ на выходе системы появится сигнал. Таким образом, вместо уравнения (39) получим уравнение

$$\sum\nolimits_{l=0}^{q} a_l\left(\bar{C}_k e^{jk\Omega t}\right)^l = C_k e^{jk\Omega t}\,,$$

из которого после дифференцирования и деления на получим соотношение

$$\bar{C}_k \sum\nolimits_{l=0}^{q} a_l\left(jk\Omega\right)^l = C_k\,,$$

позволяющее найти комплексную амплитуду

$$\bar{C}_k = \frac{C_k}{\sum\nolimits_{l=0}^{q} a_l\left(jk\Omega\right)^l}\,. \tag{44}$$

Сравнивая выражения (44) и (41), видим, что множитель при C_k может быть получен из комплексного коэффициента передачи динамической системы при условии $\omega = k\Omega$.

Запишем реакцию системы $y(t)$ на внешнее воздействие, заданное в виде ряда Фурье (33).

Как отмечалось выше, эта реакция может быть представлена в виде суммы

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{C}_k e^{jk\Omega t}\,. \tag{45}$$

Подставляя в выражение (45) равенство (44), окончательно получаем соотношение

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{C_k e^{jk\Omega t}}{\sum_{l=0}^{q}a_l\left(jk\Omega\right)^l}. \tag{46}$$

Очевидно, что в соотношении (46) нельзя выделить такую характеристику системы, которая соответствовала бы комплексному коэффициенту передачи, хотя оно позволяет по известному периодическому воздействию $f(t)$ вычислить реакцию системы $y(t)$.

Таким образом, в случае непериодических воздействий, заданных при $-\infty \le t \le \infty$, динамическую систему можно описать эквивалентно на временном и частотном языке. При этом в первом случае система характеризуется импульсной реакцией, во втором — комплексным коэффициентом передачи, которые связаны парой взаимных преобразований Фурье.

В случае периодического с периодом T или непериодического, заданного при $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ и периодически продолженного за пределы этого интервала воздействия, система может быть охарактеризована коэффициентом передачи лишь для отдельно взятого гармонического сигнала. Реакция системы на периодическое воздействие, заданное рядом Фурье, определяется во временной области выражением (46), в частотной области могут определяться лишь отдельно взятые коэффициенты разложения реакции (44).

Это обстоятельство подчеркивает различие и взаимную несводимость математических описаний, основанных на интегральных преобразованиях и ряде Фурье.

В заключение запишем выражения для непрерывных и линейчатых спектров, на основании которых сделаем некоторые общие выводы. Подвергая с этой целью выражение (2) линейному преобразованию (27), получаем равенство

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\Delta(j\omega,\tau)\,d\tau, \tag{47}$$

в котором функция $\Delta(j\omega,\tau)$ определена формулой (28).

Осуществим преобразование этой функции в частотной области в соответствии с выражением (2)

$$\Delta(jk\Omega,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\Delta(j\omega,\tau)\delta(\omega-k\Omega)\,d\omega, \tag{48}$$

где $k=0,1,2,\ldots,\Omega=2\pi/T$ — некоторая фиксированная частота.

С учетом выражения (48) равенство (37) можно переписать так:

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\Delta(jk\omega,\tau)\,d\tau. \tag{49}$$

Полагая, что функция $f(t)$, представленная рядом Фурье (2.35), равна нулю за пределами интервала $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ и подставляя в (49) соотношение (48), получаем формулу

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(j\omega,\tau)\delta(\omega - k\Omega)\,d\omega d\tau\,, \qquad (50)$$

связывающую коэффициенты ряда Фурье (35) со спектральной плотностью дельта-функции $\Delta(j\omega,\tau)$.

Сравнивая выражение (50) с формулой (47), видим, что произведение $C_k T$ может стать равным $F(j\omega)$ лишь при условии перехода от дискретной переменной $k\Omega$ к непрерывной ω^*. В этом случае (50) переходит в равенство

$$C\left(\omega^*\right)T = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(j\omega,\tau)\delta\left(\omega - \omega^*\right)d\omega d\tau = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\Delta\left(j\omega^*,\tau\right)d\tau = F\left(j\omega^*\right). \qquad (51)$$

Такой переход предполагается осуществить за счет неограниченного увеличения $T \to \infty$, при котором неограниченно уменьшается частота $\Omega = 2n / T$. Однако это предположение не снимает проблему, так как множество значений ω (или ω*) имеет мощность континуума, тогда как множество $k\Omega$счетно при любых значениях Ω.

Предположение $T \to \infty$ влечет за собой необходимость неограниченного уменьшения $C_k \to \infty$ так, чтобы произведение $C_k T \to F(j\omega)$ было конечным. Это обстоятельство приводит к противоречию при попытке установить связь между графиками спектров одиночного импульса и импульсной последовательности.

Отметим, что выражение (51) приводит к соотношению

$$\frac{C\left(\omega^*\right)}{\Omega} = \frac{1}{2\pi}F\left(j\omega^*\right). \qquad (52)$$

Приведенные рассуждения еще раз подчеркивают различие в описаниях периодических и непериодических сигналов, а также невозможность перехода от ряда к интегралу Фурье.

Выводы. Таким образом, отмеченные особенности приведенных форм интегральных моделей позволяют сделать заключение об области задач, к которым относятся приведенные модели. Это позволяет обосновывать выбор той или иной модели для исследования систем с переменными и постоянными параметрами.

Список использованной литературы:

1. Методы классической и современной теории автоматического управления / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. — М. : Изд-во МГТУ им. Г. Э. Баумана, 2004. — Т.1. Мат. модели, динамическое характеристики и анализ систем автоматического управления. — 656 с.: ил.
2. Михайлов Ф. А. Теория и методы исследования нестационарных линейных систем / Ф. А. Михайлов. — М. : Наука, 1986. — 319 с.
3. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 544 с.

The article examines the questions of representation and the relationship of time and frequency integrated model which provides an effective apparatus for studying the characteristics of dynamic systems with variable and constant parameters.

Key words: *dynamic system, frequency form of integral models, time form of integral models.*

Отримано: 27.03.2015

O. Ustun*, Ass. Prof.,
M. Yilmaz,** Ass. Prof.,
P. Ali Zada*,** Prof. Dr.,
R. N. Tuncay*,** Prof. Dr.

*Istanbul Technical University, Istanbul, Turkey
**University of Illinois at Urbana-Champaign, IL, USA
***OKAN University, Akfirat Campus, Istanbul, Turkey

NOISES CANCELLING ADAPTIVE METHODS IN CONTROL TELEMETRY SYSTEMS OF OIL ELECTRICAL SUBMERSIBLE PUMPS

The main ideas of this paper are that only some from more than 10 *MATLAB* Adaptive Methods library may be useful and can be recommended to filter out High-Noises in similar Control Telemetry Channels of Electric Power Components like ESP Systems: only four of applied have shown successfully good results in the early prediction of the ESP motor real insulation disruption (like *Sign-error, Sign-data* and *Sign-sign* filters). The best among the ten analyzed adaptive filter algorithms was recognized to be, The Normalized LMS FIR filter algorithm — *adaptfilt.nlms*.

Key words: *signal, noise, adaptive methods, oil industry, submersible pump, communication-telemetry channels.*

Introduction. More than a thousand switchboards of Electro-submersible Pump (ESP) under different trademarks are running in the oil fields. There are complicated electronic complexes for installing oil well