

- вин // Вісник Національного технічного університету «ХПІ» : зб. наук. праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків : НТУ «ХПІ», 2012. — № 27. — С. 124–129.
- Литвин О. М. Дивідіріальні та мультигральні числення : монографія / О. М. Литвин. — К. : Наук. думка, 2006. — 144 с.
  - Статистичний щорічник України (2008–2013 р.). — К. : Державний комітет статистики України, 2009–2013.
  - Праця України (2008–2013): Статистичний збірник.

In this paper the basic concept of dyvidirial and multyhral calculus, considered production function with variable coefficients of elasticity. Developed mathematical models of production functions to study agricultural economics of Ukraine.

**Key words:** *dyvidirial calculus, multyhral calculus, production function, elasticity coefficient, fixed assets, current assets.*

Отримано: 25.04.2016

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

**А. Я. Бомба**, д-р, техн. наук, професор,  
**С. В. Ярошак**, канд. техн. наук,  
**В. І. Бойцов**

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОЇ БАГАТОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В СИСТЕМІ ПАРАЛЕЛЬНИХ СВЕРДЛОВИН ЗА ТЕХНОЛОГІЮ ТЕРМОГРАВІТАЦІЙНОГО ДРЕНАЖУ**

У роботі розвинуто методи комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням групи паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу.

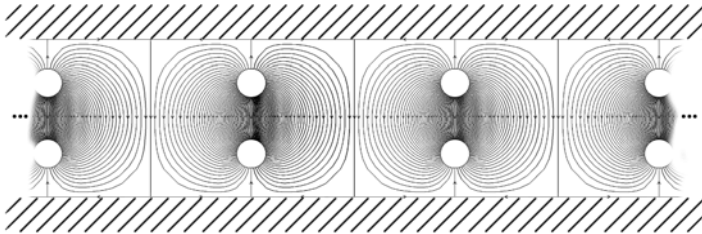
**Ключові слова:** *математичне моделювання, неізотермічна фільтрація термогравітаційний дренаж, квазіконформні відображення.*

**Вступ.** Тепловий вплив на пласт змінює основні фільтраційні параметри процесу: в'язкість флюїду, капілярні сили, реологічні властивості агентів, і т.п. [6]. Найбільш ефективними є технології нагнітання в пласт різних робочих агентів — теплоносіїв, з метою підтримки пластового тиску [1, 4–6]. При цьому за рахунок переносу течією тепла здійснюється розігрів зон пласта між свердловинами в зв'язку з чим знижується в'язкість нафти в цих зонах і, тим самим, покращується гідродинамічний зв'язок між ними [6, 7].

Однією із таких технологій є термогравітаційний дренаж, при застосуванні якої на висоті 4-6 метрів, одна над одною, буриться пара паралельних горизонтальних свердловин — нагнітальна та експлуатаційна. Проте в більшості випадків продуктивний пласт має неоднорідну будову, в результаті чого буріння лише однієї пари свердловин призводить до неконтрольованого виходу теплоносія за межі ділянки, що призводить до збільшення його витрат. Тому доцільним є буріння групи горизонтальних свердловин (рис. 1) [4].

У роботі розвинуто методи [2] комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням групи паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу [7, 8]. На основі методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних крайових задач.

**Загальна постановка задачі.** Розглянемо задачу двофазної неізотермічної фільтрації при витісненні нафти теплоносієм (зокрема, водою) з використанням групи паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу. Вважається, що динамічні в'язкості фаз змінюється зі зміною температури, рух рідини — повільний та відбувається без фазових переходів.



**Рис. 1.** Поперечний переріз пласта з групою паралельних свердловинам

Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації  $\varphi = \varphi(x, y, t)$ , згідно з [1, 7, 9] представимо у вигляді:

$$\bar{v}_l = \frac{k\tilde{k}_l(s)}{\mu_l(T)} \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div}\bar{v}_l = 0, \quad l = \overline{1, 2}, \quad s_1 + s_2 = 1,$$

де  $\bar{v}_l$ ,  $\mu_l(T)$  — вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості для  $l$ -тої фази,  $T(x, y, t)$  — температура;  $k(x, y)$  — коефіцієнт абсолютної проникності ґрунту;  $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(s)$ ,  $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(s)$  — відносні фазові проникності ( $s = s_2$ );  $\sigma$  — коефіцієнт пористості ґрунту;  $s_l(x, y, t)$  — на-

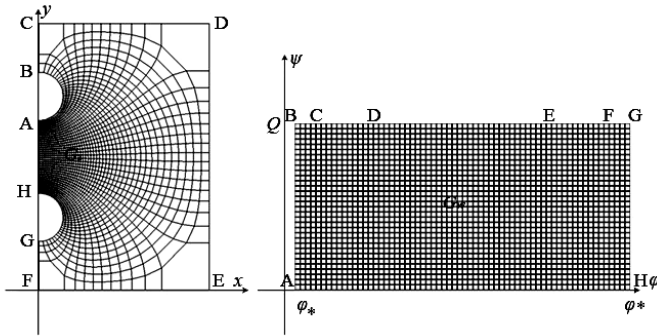
сиченість пористого середовища відповідною фазою в точці  $(x, y) \in \tilde{G}_z$  у момент часу  $t$  (тут і надалі час  $t$  та інші величини вимірюються в одиницях СІ),  $\tilde{G}_z$  — область поперечного перерізу пласта (рис. 1). В зв'язку з існуючою симетрією області  $\tilde{G}_z$ , для спрощення викладок розглядатимемо елемент  $G_z$  ( $z = x + iy$ ), що містить половину нагнітальної та половину експлуатаційної свердловини (рис. 2).

З урахуванням сумарної швидкості  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  фільтраційної течії, маємо:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \bar{k}(s, T) \operatorname{grad} \varphi, \quad (1)$$

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} f(s, T) = 0, \quad (2)$$

$$\text{де } f(s, T) = \frac{\mu_1(T) \tilde{k}_2(s)}{\mu_2(T) \tilde{k}_1(s) + \mu_1(T) \tilde{k}_2(s)}, \quad \bar{k}(s, T) = \frac{k \tilde{k}_1(s)}{\mu_1(T)} + \frac{k \tilde{k}_2(s)}{\mu_2(T)}.$$



**Рис. 2.** Елемент поперечного перерізу пласта та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

Вважаємо, що на контурах нагнітальної  $L_*$  та експлуатаційної  $L^*$  свердловин підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо:  $\varphi_*$  та  $\varphi^*$ ), а інші ділянки границі області  $G_z$  є екіпотенціальними лініями та лініями течії, вздовж яких, мають місце рівності  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{BC} = 0, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{CD} = 0, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{DE} = 0, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{EF} = 0, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{FG} = 0,$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{HA} = 0, \quad \text{де } HA = \{z : x = 0, a + 2r \leq y \leq h - b - 2r\}, \quad h = |ED|,$$

$$BC = \{z : x = 0, h - b \leq y \leq h\}, \quad CD = \{z : y = h, 0 \leq x \leq d\}, \quad DE = \{z : x = d,$$

$0 \leq y \leq h\}$ ,  $EF = \{z: y=0, 0 \leq x \leq d\}$ ,  $d = |EF|$ ,  $FG = \{z: x=0, 0 \leq y \leq a\}$ ,  
 $a = |GF|$ ,  $b = |BC|$ ,  $L_* = \{z: x = r \cdot \cos(\theta), y = h - b + r \cdot (\sin(\theta) - 1),$   
 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ ,  $L^* = \{z: x = r \cdot \cos(\theta), y = a + r \cdot (\sin(\theta) + 1), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ ;  
 $r$  — радіус свердловин. Початковий розподіл насиченості в пласті і її  
значення на нагнітальній свердловині позначимо відповідно через  
 $s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y)$  та  $s|_{L_*} = s_*$ .

Для опису процесу перерозподілу тепла між фазами та скелетом, прийmemo однотемпературну модель [6], згідно з якою є миттєвою передача тепла від флюїду до скелету і в зворотному напрямку. Таким чином, для розрахунку теплового поля використовуватимемо наступне рівняння:

$$\frac{\partial C(s)T}{\partial t} + \text{div}[(c_1 \rho_1 \vec{v}_1 + c_2 \rho_2 \vec{v}_2)T] = 0, \quad (3)$$

де  $C(s) = \sigma \rho_1 c_1 (1-s) + \sigma \rho_2 c_2 s + (1-\sigma) \rho_3 c_3$  — об'ємна теплоємність пористого середовища,  $c_l$ ,  $\rho_l$  ( $l = \overline{1,3}$ ) — питома теплоємність і густина для нафти, води і скелету пласта. Використовуючи формули для визначення швидкостей руху нафти та води [3]:  $\vec{v}_1 = (1-f(s,T)) \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{v}_2 = f(s,T) \cdot \vec{v}$  і співвідношення (1), рівняння (3) перепишемо так:

$$\sigma \frac{\partial \tilde{T}(s)}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} \tilde{f}(s, T) = 0, \quad (4)$$

де  $\tilde{T}(s) = C(s) \cdot T = (\tilde{\alpha}s + \tilde{\beta}) \cdot T$ ,  $\tilde{f}(s, T) = (\tilde{\alpha}f(s, T) + c_1 \rho_1) \cdot T$ ,  $\tilde{\alpha} = \rho_2 c_2 - \rho_1 c_1$ ,  $\tilde{\beta} = \rho_1 c_1 + (\sigma^{-1} - 1) \rho_3 c_3$ . Як бачимо, спрощений запис рівняння (4) (для відшукування теплового поля) є аналогічним до рівняння (2) (для відшукування поля насиченості), що в свою чергу є передумовою для використання розроблених в роботах [2, 9] алгоритмів розв'язання ізотермічних задач багатофазної фільтрації.

Для відшукування поля температури вважатимемо заданим його розподіл в початковий момент часу  $T(x, y, 0) = \tilde{T}(x, y)$  та значення температури на контурах області:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{BC} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{CD} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{DE} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{EF} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{FG} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{AH} = 0, T|_{L_*} = T_*. \quad (5)$$

**Метод комплексного аналізу.** Аналогічно до [2], ввівши функцію течії  $\psi$ , комплексно спряжену до  $\varphi$ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденими (фіксованими у даний момент часу)

полями насиченості та температури зводиться до задачі на квазіконформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  однозв'язної області

$G_z$  на відповідну область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$ :

$$\bar{k}(s, T) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s, T) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z,$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L'} = \varphi^*, \quad \psi|_{AH} = 0, \quad \psi|_{BC \cup CD \cup DE \cup EF \cup FG} = Q, \quad (6)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_*} = s_*, \quad s|_{t=0} = \tilde{s}(x, y), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right), \quad T|_{L_*} = T_*, \quad T|_{t=0} = \tilde{T}(x, y), \quad (8)$$

де  $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$ ,  $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \psi < Q\}$ ,

$Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$  — невідома витрата.

Обернуто до (6) крайову задачу на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$ , а також, як наслідок, рівняння для дійсної  $x = x(\varphi, \psi)$  і уявної  $y = y(\varphi, \psi)$  частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (9)$$

$$x(\varphi, Q) = 0, \quad b \leq x(\varphi, Q) \leq h, \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi_C],$$

$$y(\varphi, Q) = h, \quad 0 \leq x(\varphi, Q) \leq d, \quad \varphi \in [\varphi_C, \varphi_D],$$

$$x(\varphi, Q) = d, \quad 0 \leq y(\varphi, Q) \leq h, \quad \varphi \in [\varphi_D, \varphi_E],$$

$$y(\varphi, Q) = 0, \quad 0 \leq x(\varphi, Q) \leq d, \quad \varphi \in [\varphi_E, \varphi_F],$$

$$x(\varphi, Q) = 0, \quad 0 \leq y(\varphi, Q) \leq a, \quad \varphi \in [\varphi_F, \varphi_G],$$

$$x(\varphi, 0) = 0, \quad a + 2r \leq y(\varphi, 0) \leq h - b - 2r, \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*],$$

$$x(\varphi_*, \psi) = r \cdot \cos(\theta), \quad y(\varphi_*, \psi) = h - b + r \cdot (\sin(\theta) - 1),$$

$$x(\varphi^*, \psi) = r \cdot \cos(\theta), \quad y(\varphi^*, \psi) = a + r \cdot (\sin(\theta) + 1),$$

$$\theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \psi \in [0, Q], \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left( \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (11)$$

Використавши підхід запропонований в [2, 9] задачі для відшукання насиченості та температури (7)–(8) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (12)$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad (13)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad \psi \in [0, Q],$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}, \quad (14)$$

$$\tilde{T}(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = (\tilde{\alpha} \cdot s_* + \tilde{\beta}) \cdot T_*, \quad \psi \in [0, Q],$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) &= (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) + \tilde{\beta}) \cdot \tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \\ \psi &\in [0, Q], \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*], \end{aligned} \quad (15)$$

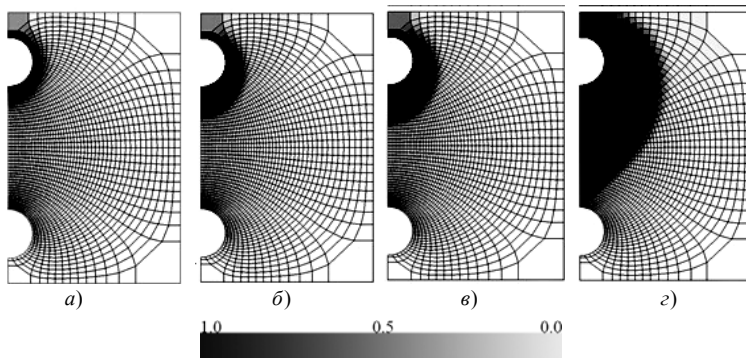
де рівняння (12) та (14) є фактично просторово-одновимірними, адже змінна  $\psi$  тут фігурує як параметр.

Алгоритм розв'язування відповідної крайової задачі представимо у вигляді наступної послідовності етапів: за заданими геометрією області фільтрації та початковими і граничними умовами розраховується поле потенціалу швидкості за поточними полями насиченості та температури; перераховується поле насиченості (за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (12) знаходимо перерозподіл насиченості); розраховується поле температури (за знайденими фільтраційними характеристиками та перерахованим полем насиченості згідно з (14) знаходимо перерозподіл температури); перевіряються умови зупинки роботи алгоритму [8] при невиконанні яких переходимо до повторного уточнення відповідних величин алгоритму.

Різницевий аналог задачі та алгоритм її розв'язання будемо аналогічно як в роботі [7].

**Числові експерименти.** Проведемо числові розрахунки при наступних значеннях параметрів моделі:  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 1$ ,  $\rho_1 = 800$ ,  $c_1 = 1880$ ,  $\rho_2 = 1000$ ,  $c_2 = 4200$ ,  $\rho_3 = 2200$ ,  $c_3 = 1800$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $s_* = 1$ ,  $s^0(x, y) = 0$ ,  $T_* = 90$ ,  $T^0(x, y) = 30$ ,  $\tau = 0.01$ ,  $n = 38$ ,  $m = 35$ ,  $k_* = 1$ ,  $\tilde{k}_1(s) = (1-s)^2$ ,  $\tilde{k}_2(s) = s^2$ , що описують процес витіснення.

На рисунку (рис. 3) представлені поля насиченості при витісненні нафти водою у випадках ізотермічного (а, в) та неізотермічного (б, г), відповідно, процесів фільтрації в момент часу  $t = 1.260$  (а, б),  $t = 1.260$  (в, г) та відстані  $|HA| = 5$ .



**Рис. 3.** Поля насиченості водою при ізотермічному (а, в) та неізотермічному (б, г) процесах фільтрації

За підрахунками (згідно формул з [3]) об'єм нафти, яка знаходилась у цих елементах симетрії до початку витіснення —  $V_n = 19.171$ , а об'єм добутої нафти та її залишок у модельному пласті за час протікання процесу, відповідно, становить: при  $t = 1.260$ :  $V_{вн} = 0.132$ ,  $V_{зл} = 19.038$  (у випадку ізотермічної фільтрації),  $V_{вн} = 0.401$ ,  $V_{зл} = 18.770$  (у випадку неізотермічної фільтрації); при  $t = 6.610$ :  $V_{вн} = 0.446$ ,  $V_{зл} = 18.725$  (у випадку ізотермічної фільтрації),  $V_{вн} = 1.337$ ,  $V_{зл} = 17.834$  (у випадку неізотермічної фільтрації).

**Висновок.** Комплексний підхід до математичного моделювання ізотермічної багатозфазної фільтрації узагальнено на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням групи паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу. Розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних крайових задач. Цей алгоритм є підґрунтям для розв'язання більш складної задачі, а саме: задачі оцінки динаміки зміни зон прогріву пласта паром, коли мають місце фазові переходи породжені охолодженням та конденсацією пару.

#### Список використаних джерел:

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. — М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. — 416 с.
2. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярошак. — Рівне : НУВГП, 2013. — 415 с.

3. Бомба А. Я. Комплексне дослідження поведінки системи «свердловини-тріщини» при витісненні однієї рідини іншою у горизонтальному пласті / А. Я. Бомба, А.М. Сінчук, С. В. Ярошак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2012. — Вип. 6. — С. 11–26.
4. Зарипов А. Т. Технико-экономическая оценка методов добычи природных битумов для условий месторождений Республики Татарстан / А. Т. Зарипов. — М. : Коллектив авторов, 2006. — С. 64–66.
5. Николин И. В. Методы разработки тяжелых нефтей и природных битумов / И. В. Николин. — М. : Технологическая компания Шлюмберже, 2007. — 68 с.
6. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта / Э. Б. Чекалюк. — М. : Недра, 1965. — 238 с.
7. Ярошак С. В. Математичне моделювання процесу розробки родовищ нафти з використанням термогравітаційного дренажу / С. В. Ярошак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — Рівне : РДГУ, 2014. — Вип. 11 (20). — С. 115–127.
8. Deutsch C. V. Guide to SAGD (Steam Assisted Gravity Drainage) Reservoir Characterization Using Geostatistics / C. V. Deutsch, J. A. McLennan // Centre for Computational Geostatistics (CCG). — 2005. Guidebook Series, 3. — 125 p.
9. Bomba A. Ya. Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions / A. Ya. Bomba, S. V. Yaroschak // Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 184, № 1. — P. 56–69.

In this article we developed a complex analysis of the developed methods of mathematical modelling of isothermal multiphase flow in the case of oil displacement using a group of parallel wells by steam assisted gravity drainage technology.

**Key words:** *mathematical modelling, non-isothermal filtration, quasi-conformal mapping.*

Отримано: 08.04.2016