

The effective by fast-acting algorithms for calculating the estimations of cross-correlation functions of sequences of different length and spectral density of stationary ergodic random processes are developed, and the analysis of their quality is performed; estimates of their basic characteristics are obtained.

**Key words:** *estimation of cross-correlation function, the «indirect» algorithm, sectioning algorithms, evaluation of Euclidean norm, rounding error.*

Отримано: 25.04.2016

УДК 519.61/.64:627.05

**Н. В. Медвідь**, аспірант

Національний університет водного господарства  
та природокористування, м. Рівне

### **КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ КОНТАКТНОЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ВЗДОВЖ ВОДОВОДУ НА ПОЛОЖЕННЯ ДЕПРЕСІЙНОЇ ПОВЕРХНІ В ГРУНТОВІЙ ГРЕБЛІ**

Побудовано математичну модель фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі при наявності зони контактної розмиву вздовж водоводу. Сформульована слабка постановка крайової задачі та знайдено її чисельний розв'язок методом скінченних елементів. Досліджено вплив контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу в греблі на положення депресійної поверхні.

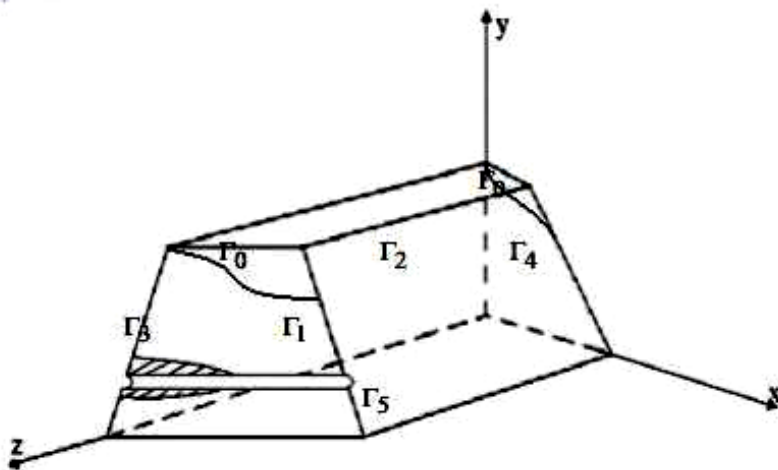
**Ключові слова:** *фільтраційна консолідація, ґрунтова гребля, депресійна поверхня, метод скінченних елементів, FreeFem++.*

**Вступ.** Для пропуску води із верхнього б'єфу в нижній в ґрунтових греблях широко використовують водоводи, наявність яких може бути причиною аварій і пошкоджень. Водовід в тілі греблі має суттєвий вплив на характер фільтрації в навалотрубній зоні. Зокрема, можуть розвинути небезпечні фільтраційні деформації, викликані контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу з розмивом ґрунтів, підйомом депресійної поверхні [1]. Навіть при справній роботі водоводу може відбуватися суфозійний розмив ґрунту в навалотрубній зоні тіла греблі контактною зосередженою фільтрацією [10]. Тому, дослідженню впливу водоводу на процеси фільтрації в тілі ґрунтової греблі слід приділяти серйозну увагу. Це актуально на етапі проектування з метою здійснення прогностичних розрахунків для недопущення критичних та аварійних ситуацій в процесі експлуатації гідротехнічної споруди.

**Вихідні передумови.** Відомо чимало випадків аварій та пошкоджень ґрунтових гребель, викликаних ерозією ґрунту та утворенням зосереджених шляхів фільтрації [8], в тому числі пов'язаних з наявністю водоводу в тілі греблі.

Серед таких аварій і пошкоджень варто згадати, що руйнування греблі Кюддов в Німеччині відбулося по причині контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу [4]. Також подібні руйнування декількох ґрунтових гребель внаслідок посиленої фільтрації вздовж водоводу сталося у Воронезькій області [5]. Відома аварія на ґрунтовій греблі в Ставропольському краї, яка сталася внаслідок контактної зосередженої фільтрації в навколотрубній зоні при неякісно виконаній зворотній засипці трубчастого водовипуску [3]. В Тульській області в 1982 році внаслідок суфозії ґрунту та зосередженої фільтрації виникла порожнина на низовому схилі греблі [4]. На ґрунтовій греблі South Fork в США в результаті суфозійного розмиву ґрунту зосередженою фільтрацією в навколотрубних зонах утворились зони вимиву [2]. Тому, аналіз роботи ґрунтової греблі з водоводом і наслідки можливих аварій має важливе значення для забезпечення нормальної роботи як нових гребель, що проектуються, так і гребель, які уже введені в експлуатацію.

**Постановка задачі та її математична модель.** Фізична постановка задачі полягає в наступному. В тілі греблі наявний водовід. В результаті виникнення зосередженої фільтрації вздовж водоводу там утворюється зона вимиву (рис. 1). Зона вимиву являє собою порожнину, яка сполучена з верхнім б'єфом і заповнена рідиною.



*Рис. 1. Тіло ґрунтової греблі та зона вимиву вздовж водоводу*

Математична модель тривимірної задачі фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі з водоводом містить наступне рівняння [6]:

$$\nabla \cdot (K \nabla h(X, t)) = \beta \frac{\partial h}{\partial t}, \quad X \in \Omega, \quad (1)$$

де  $K$  — тензор коефіцієнтів фільтрації;  $h(X, t)$  — напір в поровій рідині.

Вказане рівняння доповнюється наступними граничними умовами:

$$\begin{aligned} h(X, 0) &= h_0(X), \quad X \in \bar{\Omega}, \\ h(X) \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_0} &= y, \quad X \in \Gamma_1 \cup \Gamma_0, \quad h(X) \Big|_{\Gamma_2} = H_1(X), \quad X \in \Gamma_2, \\ (u, n) \Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} &= 0, \quad X \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \end{aligned}$$

де  $h_0(X), H_1(X)$  — відомі функції;  $n$  — вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі;  $u = -K \nabla h(X, t)$ ;  $u$  — вектор швидкості фільтрації.

З математичної точки зору товщиною порожнини вздовж стінок водоводу нехтуємо і її присутність відображається в математичній моделі заданням граничних умов виду:

$$h(X, t) \Big|_{\Gamma_p} = y,$$

де  $y$  — вертикальна координата поверхні порожнини. Поки що розміри порожнини вважаємо незмінними. В результаті присутності зосередженого шляху фільтрації вздовж водоводу, депресійна поверхня в тілі греблі буде змінювати своє положення. Ціль роботи — прогнозування зміни положення депресійної поверхні засобами математичного моделювання.

Вільна межа  $\Gamma_0$  (крива депресії) описується співвідношенням [7]:

$$\varphi(X, t) = (y - h(X, t)) \Big|_{\Gamma_0} = 0,$$

і на ній задається кінематична гранична умова [7]:

$$(u, n) \Big|_{\Gamma_0} = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

де  $\sigma$  — пористість ґрунту греблі. При цьому має бути відомим початкове положення вільної поверхні.

**Чисельне розв'язування.** Для відшукання наближеного розв'язку поставленої крайової задачі використано метод скінченних елементів (МСЕ).

Слабке формулювання крайової задачі полягає в наступному. Домножимо рівняння (1) та початкову умову для напорів на пробну функцію

$v(X) \in H_0 = \{v(X) : v(X) \in W_2^1(\Omega)\}$ ,  $v(X)|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0$ , інтегруємо їх по області  $\Omega$ , виконуємо спрощуючі перетворення і отримаємо

$$-\iiint_{\Omega} (K \nabla h \nabla v) d\Omega = \iiint_{\Omega} \beta \frac{\partial h}{\partial t} \cdot v(X) d\Omega,$$

$$\iiint_{\Omega} h(X, 0) \cdot v(X) d\Omega = \iiint_{\Omega} h_0(X) \cdot v(X) d\Omega..$$

Наближений розв'язок для напорів знаходимо у вигляді:

$$h(X, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \cdot N_j^{(h)}(X),$$

а  $v(X)$  покладається рівною кожній  $N_i^{(h)}(X)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тут  $N_j^{(h)}(X)$  — базисні вектор-функції,  $a_j(t)$  — невідомі коефіцієнти. Отримаємо задачу Коші

$$M \cdot \frac{dA}{dt} + L \cdot A(t) = 0,$$

$$M \cdot A^{(0)} = F^{(0)}, t = 0,$$

де  $A = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))^T$ ,  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ ,  $L = (l_{ij})_{i,j=1}^n$ ,

$$A^{(0)} = (a_1(0), \dots, a_n(0))^T, F^{(0)} = (f_i^0)_{i=1}^n; m_{ij} = \beta \iiint_{\Omega} N_i^h N_j^h d\Omega;$$

$$l_{ij} = \iiint_{\Omega} K \left( \frac{\partial N_i^{(h)}}{\partial x} \frac{\partial N_j^{(h)}}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(h)}}{\partial y} \frac{\partial N_j^{(h)}}{\partial y} + \frac{\partial N_i^{(h)}}{\partial z} \frac{\partial N_j^{(h)}}{\partial z} \right) d\Omega;$$

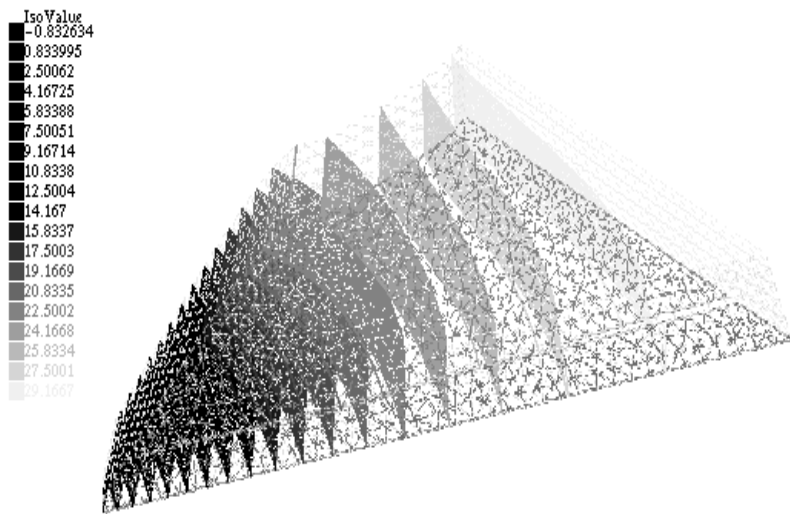
$$f_i^0 = \iiint_{\Omega} h_0 \cdot N_i^h d\Omega.$$

Розіб'ємо часовий проміжок на  $m$  рівних частин з кроком  $\tau = \frac{T}{m}$ . Наближений розв'язок задачі Коші отримаємо за допомогою лінеаризованої неявної різницевої схеми

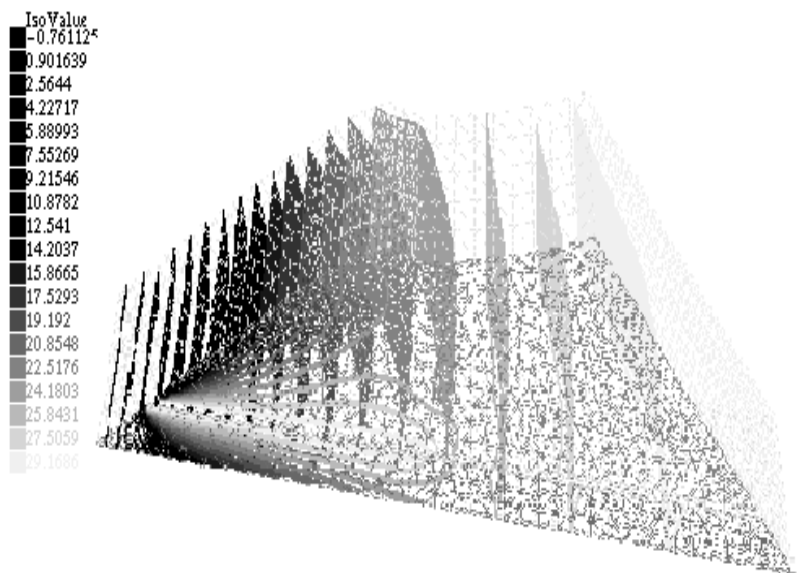
$$M \cdot \frac{A^{(j+1)} - A^{(j)}}{\tau} + L \cdot A^{(j+1)} = 0,$$

$$M^{(0)} \cdot A^{(0)} = F^{(0)}, j = 0, 1, \dots, m-1.$$

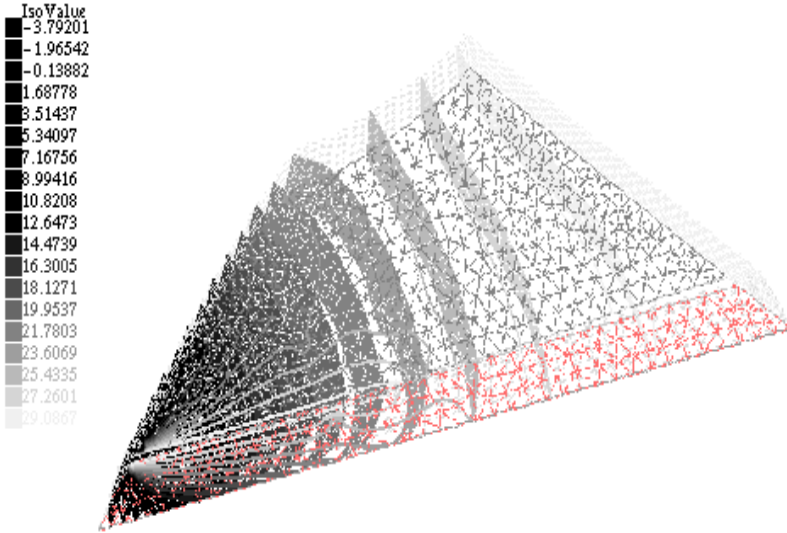
**Результати чисельного експерименту.** Задача розв'язана в середовищі FreeFem++, яке являє собою програмне забезпечення для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь МСЕ [9]. Проведено ряд чисельних експериментів, результати яких відображено на рис. 2–7.



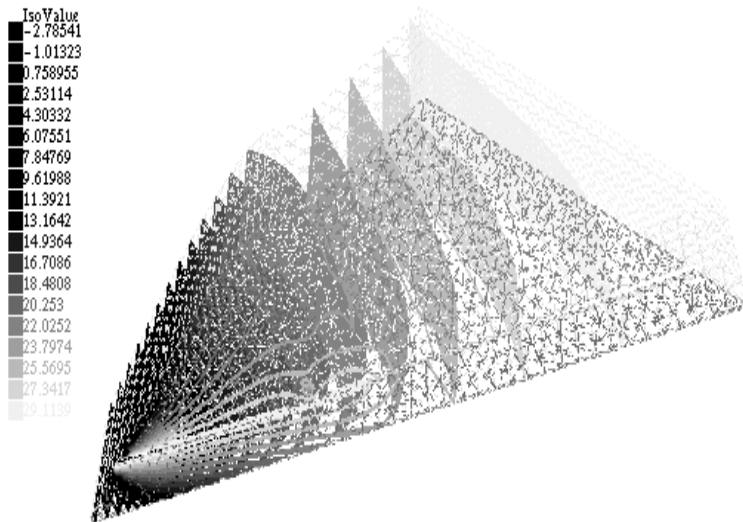
*Рис. 2. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом без контактної зосередженої фільтрації через 10 років при  $K = 0.001$  м / доба*



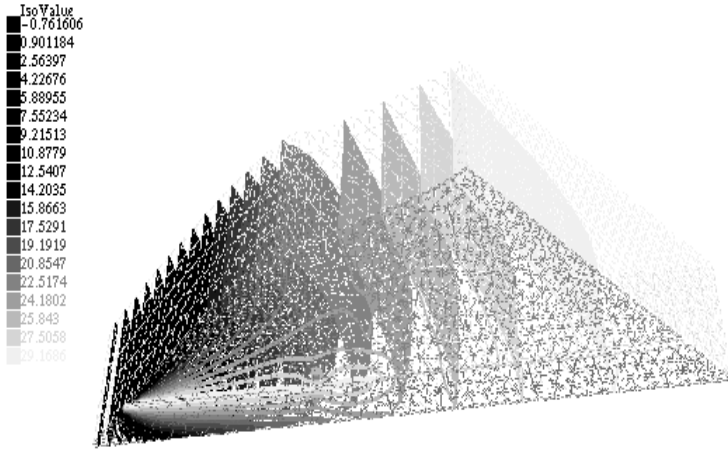
*Рис. 3. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 1 рік при  $K = 0.001$  м / доба*



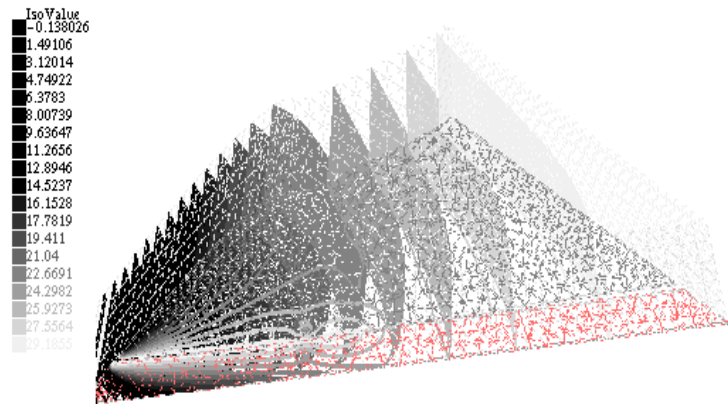
*Рис. 4. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при  $K = 0.001$  м / доба*



*Рис. 5. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при  $K = 0.01$  м / доба*



*Рис. 6. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при  $K = 0.1$  м / доба*



*Рис. 7. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при  $K = 1$  м / доба*

**Висновки.** Наявність зони контактної розмиву вздовж водоводу суттєво впливає на положення депресійної поверхні в околі водоводу. При цьому, депресійна поверхня піднімається і максимальна різниця між положеннями вільних меж в греблях при наявності та відсутності водоводу через 1 рік складає майже 0,03 м, а через 10 років ця різниця складає вже 0,22 м при коефіцієнті фільтрації  $K = 0.001$  м/доба . При

$K = 0.01$  м/доба через 10 років ця різниця складає 0,25 м, при  $K = 0.1$  м/доба — 0,33 м, а при  $K = 1$  м/доба 0,39 м. Підняття рівня вільної поверхні може негативно позначитися на стійкості ґрунтової греблі. Нехтувати впливом наявності водоводу в тілі ґрунтової греблі не можна.

### Список використаних джерел:

1. Анахаев К. Н. Об авариях и повреждениях земляных плотин с водоводами: причины и способы совершенствования противофильтрационной защиты / К. Н. Анахаев, К. А. Гегиев, Б. Х. Амшоев // Гидротехническое строительство. — 2004. — №3. — С. 30–36.
2. Белов В. А. Противофильтрационные мероприятия на малых водоемах / В. А. Белов. — Ростов-на-Дону : СКНЦ ВШ, 2000. — 191 с.
3. Запорожченко Э. В. Природно-антропогенные процессы и явления/ Э. В. Запорожченко и др. // Сб. научных трудов ин-та «Севкавгипроводхоз». — 1999. — № 14. — 144 с.
4. Косиченко Ю. М. Оценка уровня фильтрационной безопасности земляных плотин и эффективности инженерной защиты малых водохранилищ/ Ю. М. Косиченко и др. — Новочеркасск, 2001. — 57 с.
5. Кремез С. А. Опыт строительства и эксплуатации малых водохранилищ ЦЧО / С. А. Кремез. — Воронеж : ВГУ, 1965. — 138 с.
6. Медвідь Н. В. Дослідження впливу тепло-солеперенесення на швидкість фільтрації в ґрунтовій греблі (просторова задача) / Н. В. Медвідь, П. М. Мартинюк // Вісник Тернопільського національного технічного університету. — 2015. — № 4. — С. 169–178.
7. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
8. Foster M. Use of event trees to estimate the probability of failure of embankment dams by internal erosion and piping / M. Foster, R. Fell //20<sup>th</sup> Congress on Large Dams. — Beijing, 2000. — P. 237–259.
9. FreeFem++. ThirdEdition / F. Hecht, S. Auliac, O. Pironneau, J. Morice, A. LeHyaric, K. Ohtsuka. — Laboratoire Jacques — Louis Lions, Universite Pierreet Marie Curie, Paris. — 378 p. — Режим доступу: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>.
10. Sellmeijer J. B. Numerical computation of seepage erosion below dams (piping) / J. B. Sellmeijer // Proceedings of Third International Conference on Scour and Erosion. — 2006. — P. 596–601.

Mathematical model of filtration consolidation in the body of soil dam at the presence of contact erosion zone along the conduit has been created. Variational formulation of the boundary problem was formulated. Also numerical solution was found by finite element method. The impact of contact concentrated filtration along conduit in the dam on position of depression surface was investigated.

**Key words:** *filtration consolidation, soil dam, depression surface, finite element method, FreeFem++.*

Отримано: 15.04.2016