

УДК 539.3

**Р. С. Мусій**, д-р фіз.-мат. наук,

**Н. Б. Мельник**, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНІКИ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ ЗА ДІЇ ІМПУЛЬСНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ**

Запропоновано математичну модель дослідження термонапруженого стану, несучої здатності і властивостей контактного з'єднання складових тіл кусково-однорідного електропровідного тіла за дії імпульсних електромагнітних полів. Записано вихідні співвідношення термомеханіки такого тіла у переміщеннях і напруженнях. Сформульовано крайові умови на ключові функції як на зовнішніх поверхнях тіла, так і на поверхнях з'єднань його складових тіл. Як приклад наведено результати числових досліджень несучої здатності довгого біметалевого порожнистого циліндра за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модульним сигналом за використання частот електромагнітного поля поза околوم резонансних та рівних першій резонансній частоті.

**Ключові слова:** *математична модель, термомеханіка, кусково-однорідне електропровідне тіло, імпульсне електромагнітне поле, несуча здатність, властивості контактного з'єднання.*

**Вступ.** Елементами конструкцій сучасних машин і механізмів є кусково-однорідні електропровідні тіла (КОЕТ), які за експлуатації цих пристроїв зазнають впливу різних фізико-механічних полів, зокрема імпульсних електромагнітних полів (ЕМП) [1, с. 14–15; 10, с. 211–213].

У літературі розглянуто математичні моделі однорідних і кусково-однорідних тіл за нестационарних силових і теплових навантажень [4, с. 43–50, 125–160; 5, с. 117–131; 6, с. 437, 548; 9, с. 115–168] та наявні математичні моделі термомеханіки однорідних електропровідних тіл за дії ЕМП різних типів [2; 3, с. 23–40; 8, с. 34–46; 12, с. 27–41]. Дана модель враховує адіабатичність процесів нагріву та деформування електропровідного тіла імпульсним ЕМП (ІЕМП), що експериментально спостерігається за дії ІЕМП різних типів, зокрема з модуляцією амплітуди в режимах з імпульсним модульним сигналом (ІМС) та згасної синусоїди (РЗС) і поодинокого електромагнітного імпульсу (ЕМІ). Такі ІЕМП широко використовують в технологіях імпульсної електромагнітної обробки матеріалів [1, с. 13–14]. В рамках цієї моделі досліджено термомеханічну поведінку і несучу здатність однорідних електропровідних тіл канонічної форми за дії розглядуваних характерних типів ІЕМП. Крім температури, зумовленої Джоулевым теплом, досліджено додатковий складник температури, створений нагрівом електропровідного тіла внаслідок

його об'ємної деформації за рахунок дії об'ємної пондеромоторної сили. Отримано, що цей складник температури є нехтовним за дії ЕМП та за дії в РІМС і РЗС при використанні частот несучих електромагнітних коливань поза околом резонансних частот ЕМП і складає на першій резонансній частоті 10-20 % від величини складника температури, зумовленого джоулевим теплом.

Аналіз отриманих якісних та кількісних результатів деформування однорідних електропровідних тіл ІЕМП характерних типів на основі розглядуваної моделі підтверджує раціональність її використання для визначення термонапруженого стану однорідних електропровідних тіл за дії ІЕМП з модуляцією амплітуди радіочастотного діапазону.

**Розрахункова модель.** При розгляді КОЕТ виникає питання врахування електромагнітного, теплового і механічного контактів між складовими тілами та впливу цього контакту на розподіл фізико-механічних полів в кожному складовому тілі. Тому розрахункова модель визначення термонапруженого стану (ТНС) КОЕТ за дії ІЕМП складається з трьох етапів [7]. На першому етапі в кожному  $n$ -му складовому тілі КОЕТ зі співвідношень Максвелла визначається нестационарне ЕМП, яке описується вектором напруженості магнітного поля  $\vec{H}^{(n)}$ , та зумовлені ним джоулеві тепловиділення  $Q^{(n)}$  і пондеромоторні сили  $\vec{F}^{(n)}$  за врахування заданих граничних умов на зовнішніх поверхнях тіл та умов ідеального електромагнітного контакту на поверхнях їх розділу. На другому етапі з рівняння теплопровідності, в якому джоулеві тепловиділення  $Q^{(n)}$  є об'ємними джерелами тепла, визначається нестационарне температурне поле  $T^{(n)}$  в кожному  $n$ -му складовому тілі КОЕТ за умов конвективного теплообміну з довкіллям на зовнішніх поверхнях та ідеального теплового контакту на поверхнях з'єднання складових тіл. На третьому етапі з рівнянь динамічної термомпружності за знайденими температурою  $T^{(n)}$  та пондеромоторною силою  $\vec{F}^{(n)}$  визначаємо вектор переміщень  $\vec{U}^{(n)}$  та тензор динамічних напружень  $\hat{\sigma}^{(n)}$  в кожному  $n$ -му складовому тілі КОЕТ.

Для оцінки несучої здатності КОЕТ визначаємо інтенсивності  $\sigma_i^{(n)}$  сумарних напружень  $\hat{\sigma}^{(n)} = \hat{\sigma}^{(n)Q} + \hat{\sigma}^{(n)F}$  (зумовлених як джоулевим теплом, так і пондеромоторними силами) [11, с. 463] в кожному  $n$ -му складовому тілі, які обчислюються за формулою [5, с. 183]

$$\sigma_i^{(n)} = \sqrt{(3I_2(\hat{\sigma}^{(n)}) - I_1^2(\hat{\sigma}^{(n)})) / 2} \quad (1)$$

і порівнюємо їх величину з межею пружного деформування  $\sigma_d^{(n)}$  матеріалу  $n$ -го тіла. Тут  $I_j(\hat{\sigma}^{(n)})$  —  $j$ -й інваріант тензора напружень.

КОЕТ втрачає несучу здатність в цілому, якщо її втрачає хоча б одне зі складових тіл, тобто в  $n$ -му складовому тілі

$$\max \sigma_i^{(n)} \leq \sigma_d^{(n)}. \quad (2)$$

Ця умова відповідає умові Губера-Мізеса [5, с. 65; 6, с. 437] початку пластичності для ізотропного тіла, згідно якої пластичні деформації виникають тоді, коли інтенсивність напружень  $\sigma_i$  досягає межі плинності матеріалу  $\sigma_d$  при його розтягу.

У технічних пристроях, елементами конструкцій яких є КОЕТ, важливим також є збереження властивостей контактної з'єднання їх складових тіл. Для оцінки межі збереження цих властивостей величини інтенсивностей напружень  $\sigma_i^{(n)*}$  в складових тілах на поверхні контакту  $n$ -го і  $(n+1)$ -го складових тіл порівнюються з межею міцності  $\sigma_M^{(n)}$   $n$ -го контактної з'єднання. Якщо

$$\sigma_i^{(n)*} \leq \sigma_M^{(n)}, \quad (3)$$

то властивості  $n$ -го контактної з'єднання зберігаються. Зауважимо, що величини  $\sigma_d^{(n)}$  та  $\sigma_M^{(n)}$  для використовуваних в техніці матеріалів складових тіл КОЕТ відомі з експериментів.

#### Вихідні співвідношення термомеханіки КОЕТ за дії ЕМП.

Сформулюємо вихідні фізичні та математичні положення і запишемо вихідні співвідношення для кількісного опису параметрів, що характеризують електромагнітні, теплові та механічні процеси в КОЕТ за дії ЕМП з модуляцією амплітуди. Такі ЕМП задаються значеннями вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, t)$  на зовнішніх поверхнях складових шарів КОЕТ у вигляді

$$\vec{H}(\vec{r}_s^{(n)}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}_s^{(n)}, t) \equiv \vec{H}^0(\vec{r}_s^{(n)}, t) \sin(\omega t + \varphi_n). \quad (4)$$

Тут  $\vec{H}^0(\vec{r}_s^{(n)}, t) = H_*(t) \vec{H}_0^*(\vec{r}_s^{(n)})$  — модульована амплітуда;

$\vec{H}_0^*(\vec{r}_s^{(n)})$  — амплітуда несучого сигналу;  $H_*(t)$  — безрозмірна функція імпульсного характеру зміни в часі  $t$  сигналу, який модулює амплітуду електромагнітних коливань (амплітуду несучого сигналу), і задовольняє умови  $H_*(t) \leq 1$  при  $t \in [0, t_i]$ ,  $H_*(0) = 0$ ,  $H_*(t_i) = 0$ ;  $\omega$  — частота несучого сигналу;  $t_i$  — час тривалості електромагнітної дії;  $\varphi_n$  — початкова фаза,  $\vec{r}$  і  $\vec{r}_s^{(n)}$  — радіус-вектори точок об'єму  $V$  і зовнішніх поверхонь  $S_n$  складових шарів КОЕТ.

Приймаємо, що параметри  $\omega$ ,  $t_i$ ,  $\vec{H}_0^*(\vec{r}_s^{(n)})$ ,  $H_*(t)$  є такими, що діюче імпульсне ЕМП належить до класу імпульсних «неруйнівних» ЕМП, дія яких ще не приводить до виникнення ударних хвиль (з імпульсом довжиною менше часток секунди ( $t_i < 0,01$  с) і з найбільшим значенням напруженості магнітного поля на поверхнях тіла  $H_{\max} \leq 10^7$  А/м.

Матеріали складових шарів КОЕТ вважаються однорідними ізотропними недіелектричними неферомагнітними, для яких електромаханічні та термоелектричні ефекти неістотні, вектори індукцій  $\vec{D}^{(n)}$  і  $\vec{B}^{(n)}$  паралельні до векторів напруженостей електричного  $\vec{E}^{(n)}$  та магнітного  $\vec{H}^{(n)}$  полів, а струми провідності  $\vec{j}^{(n)}$  паралельні до  $\vec{E}^{(n)}$ . Приймаємо, що матеріальні рівняння електродинаміки в кожному  $n$ -му шарі мають вигляд

$$\vec{D}^{(n)} = \varepsilon_n \vec{E}^{(n)}, \quad \vec{B}^{(n)} = \mu_n \vec{H}^{(n)}, \quad \vec{j}^{(n)} = \sigma_n \vec{E}^{(n)}, \quad (5)$$

де  $\varepsilon_n = \varepsilon_0 \varepsilon_{*n}$ ,  $\mu_n = \mu_0 \mu_{*n}$ ,  $\varepsilon_{*n}$ ,  $\mu_{*n}$  — відносні електрична і магнітна проникливості,  $\sigma_n$  — коефіцієнт електропровідності матеріалу  $n$ -го складового шару,  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  — відповідно електрична і магнітна сталі.

За таких припущень вплив імпульсного ЕМП на процеси теплопровідності та деформування в електропровідному тілі, як і у відомих в літературі моделях для квазіусталених ЕМП [12, с. 33–44], враховуємо через зумовлені цим полем фізичні чинники — джоулеві тепловиділення і пондеромоторні сили

$$\vec{Q}^{(n)} = \sigma_n \vec{E}^{(n)} \vec{E}^{(n)}, \quad \vec{F}^{(n)} = \sigma_n \mu_n \vec{E}^{(n)} \times \vec{H}^{(n)}. \quad (6)$$

Ці фактори призводять до виникнення нестационарних температурних та механічних полів. Пондеромоторні моменти  $\vec{M}^{*(n)} = \vec{M}_E^{*(n)} + \vec{M}_M^{*(n)}$ , де  $\vec{M}_E^{*(n)} = \vec{P}^{(n)} \times \vec{E}^{(n)}$  — електричні моменти,  $(\vec{M}_M^{*(n)} = \vec{M}^{(n)} \times \vec{B}^{(n)})$  — магнітні моменти;  $\vec{P}^{(n)} = \vec{D}^{(n)} - \varepsilon \vec{E}^{(n)}$ ,  $\vec{M}^{(n)} = \vec{B}^{(n)} / \mu_{0n} - \vec{H}^{(n)}$  — відповідно вектори поляризації і намагнічування) внаслідок паралельності векторів індукцій і напруженостей електричного та магнітного полів є рівні нулю. В такому наближенні і за сталих характеристик матеріалу (зокрема, рівних середнім значенням у розглядуваному інтервалі зміни температур) вихідні співвідношення для кількісного опису параметрів, що характеризують електромагнітні, теплові та механічні процеси в тілах за імпульсної електромагнітної дії, формулюємо за три етапи, згідно вибраної розрахункової схеми.

На першому етапі визначаємо параметри ЕМП в  $n$ -му складовому шарі КОЕТ. За ключову функцію вибираємо вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, t)$ . Нехтуючи струми зміщення для тривалостей фронтів імпульсної електромагнітної дії більших, ніж  $10^{-6}$  с і частот електромагнітних коливань менших, ніж  $10^8$  Гц, на основі співвідношень Максвелла і закону Ома за прийнятих припущень [11, с. 416–421]

$$\operatorname{rot} \vec{H}^{(n)} = \vec{j}^{(n)}, \operatorname{rot} \vec{E}^{(n)} = -\mu_n \frac{\partial \vec{H}^{(n)}}{\partial t}, \vec{j}^{(n)} = \sigma_n E^{(n)} \quad (7)$$

отримуємо рівняння для визначення  $\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, t)$  в  $n$ -му складовому тілі

$$\Delta \vec{H}^{(n)} - \sigma_n \mu_n \frac{\partial \vec{H}^{(n)}}{\partial t} = 0, \operatorname{div} \vec{H}^{(n)} = 0 \quad (8)$$

за крайових умов

$$\vec{H}^{(n)}(\vec{r}_s, t) = \vec{H}_*^{(n)}(t) H_0^* \left( \vec{r}_s^{(n)} \right) \quad (9)$$

на зовнішніх поверхнях  $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$   $n$ -го тіла та умов ідеального електромагнітного контакту, який на поверхні  $\vec{r} = \vec{r}_n$  з'єднання  $n$ -го і  $(n+1)$ -го складових тіл КОЕТ запишеться у вигляді

$$\vec{H}^{(n)} = \vec{H}^{(n+1)}, \operatorname{rot} \vec{H}^{(n)} = k_\sigma^n \operatorname{rot} \vec{H}^{(n+1)} \quad (10)$$

та нульових початкових умов

$$\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0. \quad (11)$$

Тут  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $k_\sigma^n = \sigma_n / \sigma_{n+1}$ .

Питомі густини джоулевого тепла  $Q^{(n)}(\vec{r}, t)$  і пондеромоторних сил  $\vec{F}^{(n)}(\vec{r}, t)$  визначаються за формулами

$$Q^{(n)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sigma_n} \left( \operatorname{rot} H^{(n)}(\vec{r}, t) \right)^2, \quad (12)$$

$$F^{(n)}(\vec{r}, t) = \mu_n \cdot \operatorname{rot} H^{(n)}(\vec{r}, t) \times H^{(n)}(\vec{r}, t). \quad (13)$$

На другому етапі за знайденим розподілом джоулевого тепла  $Q^{(n)}(\vec{r}, t)$  визначається температура  $T^{(n)}(\vec{r}, t)$  в  $n$ -му шарі КОЕТ з рівняння теплопровідності

$$\Delta T^{(n)} - \frac{1}{\kappa_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = -\frac{Q^{(n)}}{\lambda_n} \quad (14)$$

з урахуванням умов конвективного теплообміну з довкіллям

$$\frac{\partial T^{(n)}}{\partial n} + H \left( T^{(n)} - T_s^{(n)} \right) = 0 \quad (15)$$

на зовнішніх поверхнях  $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$   $n$ -го тіла, умов

$$T^{(n)} = T^{(n+1)}, \quad \text{grad } T^{(n)} = k_\lambda^n \text{grad } T^{(n+1)} \quad (16)$$

ідеального теплового контакту на поверхні  $\vec{r} = \vec{r}_n$  з'єднання  $n$ -го і  $(n+1)$ -го складових тіл КОЕТ та початкових умов

$$T^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0. \quad (17)$$

Тут  $T^{(n)}$  — відхилення температури від початкової  $T_0^{(n)}$ , К;  $\partial T^{(n)} / \partial n = \vec{n} \text{grad } T^{(n)}$ ;  $\vec{n}$  — вектор нормалі до зовнішньої поверхні  $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$ ;  $T^{(n)}$  — задана постійна температура довкілля зовні  $n$ -го тіла;  $H_n = H_{*n} / \lambda_n$  — відносний коефіцієнт тепловіддачі;  $H_{*n}$  — коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь  $n$ -го тіла;  $k_\lambda^n = \lambda_{n+1} / \lambda_n$ ;  $\kappa_n$ ,  $\lambda_n$  — коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалів  $n$ -го тіла.

На третьому етапі за відомими виразами температури  $T^{(n)}(\vec{r}, t)$  і пондеромоторної сили  $\vec{F}^{(n)}(\vec{r}, t)$  визначається термонапружений стан КОЕТ з рівнянь незв'язаної динамічної задачі термопружності, записаних для  $n$ -го тіла

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\sigma}^{(n)} + \vec{F}^{(n)} &= \rho_n \frac{\partial \vec{u}^{(n)}}{\partial t}, \\ \vec{\sigma}^{(n)} &= 2G_n \left\{ \vec{e}^{(n)} + \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \left[ e_{jj}^{(n)} - \alpha_n \frac{1+\nu_n}{1-2\nu_n} T^{(n)} \right] \vec{I} \right\}, \quad (18) \\ \vec{e}^{(n)} &= \text{Def } \vec{u}^{(n)} = \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \vec{u}^{(n)} + \vec{u}^{(n)} \vec{\nabla} \right). \end{aligned}$$

Тут  $\vec{e}^{(n)} = \left\{ e_{ij}^{(n)} \right\}$  — тензор деформацій;  $\text{Def}$  — деформатор;  $\vec{\nabla}$  — оператор Гамільтона;  $\vec{I} = \left\{ \delta_{ij} \right\}$  — одиничний тензор;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\vec{\nabla} \vec{u}^{(n)}$ ,  $\vec{u}^{(n)} \vec{\nabla}$  — діадний добуток векторів  $\vec{\nabla}$  і  $\vec{u}^{(n)}$ ;  $\alpha_n$ ,  $\nu_n$  — коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона;  $G_n = E_n / 2(1+\nu_n)$  — модуль зсуву;  $E_n$  — модуль Юнга;  $\rho_n$  — густина матеріалу  $n$ -го тіла. Всі теплофізичні та фізико-механічні характеристики матеріалів складових тіл вважаються постійними.

Рівняння (18) розв'язуються за відповідних крайових (теплових і механічних) та початкових умов. За початкові умови переважно задають значення вектора переміщень  $\vec{u}^{(n)}$ , швидкості  $\partial\vec{u}^{(n)}/\partial t$  та температури  $T^{(n)}$  у всій області кожного  $n$ -го складового тіла в початковий момент часу при  $t = 0$ . Якщо ці функції дорівнюють нулю, то початкові умови мають вигляд

$$u_i^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_i^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} = 0, \quad T^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (19)$$

Залежно від вигляду крайових умов, система рівнянь (18) розв'язується в переміщеннях або в напруженнях. Якщо визначальними функціями задачі термопружності є температура  $T^{(n)}(\vec{r}, t)$  і тензор напружень  $\hat{\sigma}^{(n)}(\vec{r}, t)$ , то отримуємо систему

$$\text{Def} \left( \text{div} \hat{\sigma}^{(n)} + \vec{F}^{(n)} \right) = \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1 + \nu_n}{E_n} \hat{\sigma}^{(n)} + \left( \alpha_n T^{(n)} - \frac{\nu_n}{E_n} \sigma_*^{(n)} \right) \hat{I} \right], \quad (20)$$

а у випадку визначальних функцій  $T^{(n)}(\vec{r}, t)$  і  $\vec{u}^{(n)}(\vec{r}, t)$  — систему

$$\begin{aligned} \left( \Delta + \frac{1}{1 - 2\nu_n} \text{grad div} \right) \vec{u}^{(n)} - \frac{2(1 + \nu_n)\rho_n}{E_n} \frac{\partial^2 \vec{u}^{(n)}}{\partial t^2} = \\ = \frac{\alpha_n E_n}{1 - 2\nu_n} \text{grad} T^{(n)} - \frac{2(1 + \nu_n)}{E_n} \vec{F}^{(n)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тут  $\sigma_*^{(n)} \equiv I_1(\hat{\sigma}^{(n)})$ . Рівняння (20) розв'язуємо за крайових умов

$$\hat{\sigma}^{(n)} \vec{n} = 0, \quad (22)$$

що відповідають відсутності на зовнішніх поверхнях  $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$  складових тіл силового навантаження, та умов ідеального механічного контакту

$$\hat{\sigma}^{(n)} = \hat{\sigma}^{(n+1)}, \quad \text{div} \hat{\sigma}^{(n)} + \vec{F}^{(n)} = k_\rho^n \left( \text{div} \hat{\sigma}^{(n+1)} + \vec{F}^{(n+1)} \right) \quad (23)$$

на поверхні  $\vec{r} = \vec{r}_n$  з'єднання  $n$ -го і  $(n+1)$ -го складових тіл КОЕТ, та за початкових умов

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \\ \frac{1}{2G_n} \frac{\partial \hat{\sigma}^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} + \left( \alpha_n \frac{\partial T^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} - \frac{\nu_n}{E_n} \frac{\partial \sigma_*^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} \right) \hat{I} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

при  $t = 0$ . Тут  $k_\rho^n = \rho_n / \rho_{n+1}$ .

Рівняння (21) в переміщеннях розв'язуємо за крайових умов

$$\left\{ \text{Def } \vec{u}^{(n)} + \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \left[ \text{div } \vec{u}^{(n)} - \frac{\alpha_n(1+\nu_n)}{1-2\nu_n} T^{(n)} \right] \hat{I} \right\} \vec{n} = 0, \quad (25)$$

що відповідають умовам (22), записаним відносно вектора переміщень  $\vec{u}^{(n)}$ , на вільних від силового навантаження зовнішніх поверхнях  $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$ , та умов ідеального механічного контакту

$$\vec{u}^{(n)} = \vec{u}^{(n+1)}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \text{Def } \vec{u}^{(n)} + \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \left[ \text{div } \vec{u}^{(n)} - \frac{\alpha_n(1+\nu_n)}{1-2\nu_n} T^{(n)} \right] \hat{I} = \\ & = k_E^n \left\{ \text{Def } \vec{u}^{(n+1)} + \frac{\nu_{n+1}}{1-2\nu_{n+1}} \left[ \text{div } \vec{u}^{(n+1)} - \frac{\alpha_{n+1}(1+\nu_{n+1})}{1-2\nu_{n+1}} T^{(n+1)} \right] \hat{I} \right\} \end{aligned}$$

на поверхні  $\vec{r} = \vec{r}_n$  з'єднання  $n$ -го і  $(n+1)$ -го складових тіл КОЕТ, а також початкових умов

$$\vec{u}^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} = 0, \quad (27)$$

при  $t = 0$ . Тут  $k_E^n = E_{n+1}(1+\nu_n)/E_n(1+\nu_{n+1})$ .

За знайденим вектором переміщень  $\vec{u}^{(n)}$  визначаємо тензор напружень  $\vec{\sigma}^{(n)}$  в  $n$ -му тілі зі співвідношення

$$\vec{\sigma}^{(n)} = 2G_n \left\{ \text{Def } \vec{u}^{(n)} + \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \left[ \text{div } \vec{u}^{(n)} - \frac{\alpha_n(1+\nu_n)}{1-2\nu_n} T^{(n)} \right] \hat{I} \right\}. \quad (28)$$

Для оцінки вкладу джоулевого тепла  $Q^{(n)}(\vec{r}, t)$  і пондеромоторних сил  $\vec{F}^{(n)}(\vec{r}, t)$  на термонапружений стан КОЕТ тензор напружень  $\vec{\sigma}^{(n)}$  і вектор переміщень  $\vec{u}^{(n)}$  подаємо у вигляді суми двох складників

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \vec{\sigma}^{Q(n)} + \vec{\sigma}^{F(n)}, \quad \vec{u}^{(n)} = \vec{u}^{Q(n)} + \vec{u}^{F(n)} \quad (29)$$

зумовлених відповідно джоулевым теплом і пондеромоторною силою  $\vec{F}^{(n)}$ . Складники  $\vec{\sigma}^{Q(n)}$ ,  $\vec{u}^{Q(n)}$  визначаємо з рівнянь (20)–(21) при  $\vec{F}^{(n)} = 0$ , а складники  $\vec{\sigma}^{F(n)}$  і  $\vec{u}^{F(n)}$  — з цих рівнянь при  $T^{(n)} = 0$ .



За знайденими сумарними векторами переміщень  $\vec{u}^{(n)}$  і тензорами напружень  $\vec{\sigma}^{(n)}$  з врахуванням формули (28) для знайдених переміщень  $\vec{u}^{(n)}$  визначаємо за формулою (1) інтенсивності напружень в  $n$ -му складовому тілі КОЕТ та на основі виконання нерівностей (2) і (3) досліджуємо несучу здатність та збереження властивостей контактного з'єднання.

**Чисельний аналіз.** На основі запропонованої математичної моделі досліджено термонапружений стан і несучу здатність довгого біметалевого порожнистого циліндра, виготовленого з нержавної сталі Х18Н9Т та міді з радіусами: внутрішнім  $r_0 = 8$  мм, поверхні з'єднання  $r_1 = 9$  мм і зовнішнім  $r_2 = 10$  мм за електромагнітної дії в РІМС тривалістю  $t_i = 10^{-3}$  с поза околom резонансних частот ЕМП при  $\omega = \omega_* = 6.28 \cdot 10^4$  1/с і на першій резонансній частоті при  $\omega = \omega_{r_1} = 2.32 \cdot 10^5$  1/с.

На рис. 1, 2 показано зміну в часі інтенсивностей напружень  $\sigma_i^{(n)}$  на поверхні з'єднання  $\vec{r} = \vec{r}_1$  складових шарів біметалевого циліндра при  $\omega = \omega_*$  (рис. 1) і при  $\omega = \omega_{r_1}$  (рис. 2). Лінії 1 на рис. 1, а також рис.2, а відповідають сталевому, а лінії 2 на рис. 1 та рис. 2,б — мідному шарам.

$$\sigma_i^{(n)} \cdot 10^5 / H_0^2, \text{ Па} \frac{\text{М}^2}{\text{А}^2}$$

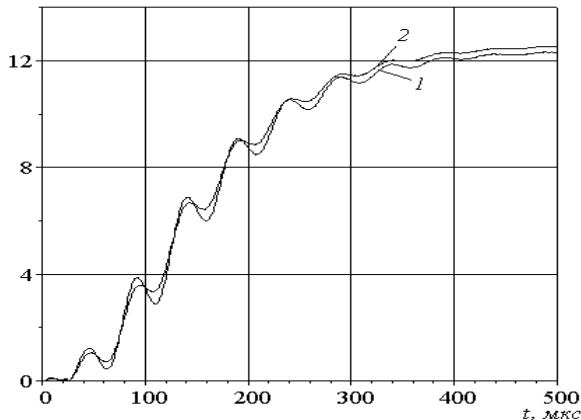


Рис. 1. Зміна в часі інтенсивностей напружень  $\sigma_i^{(n)}$  при  $\omega = \omega_*$

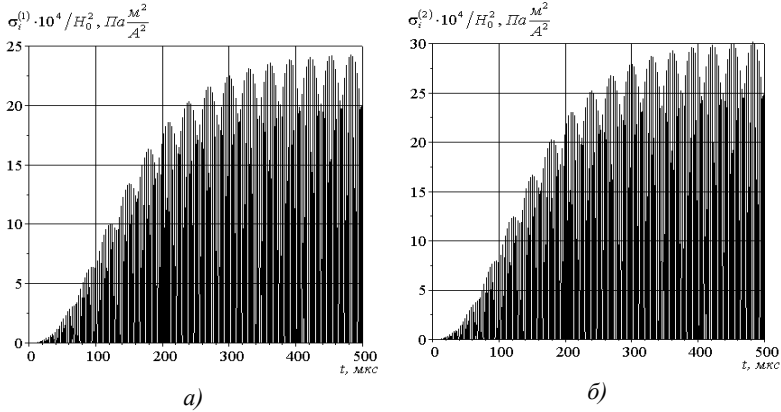


Рис. 2. Зміна в часі інтенсивностей напружень  $\sigma_i^{(n)}$  при  $\omega = \omega_{r1}$

На рис. 3 подано залежності максимальних значень  $\sigma_i^{\max}$  інтенсивностей напружень в складових шарах циліндра на поверхні їх з'єднання за різних тривалостей дії в РІМС від величини  $H_0$  — максимального значення напруженості магнітного поля на зовнішніх поверхнях циліндра за розглядуваної електромагнітної дії.

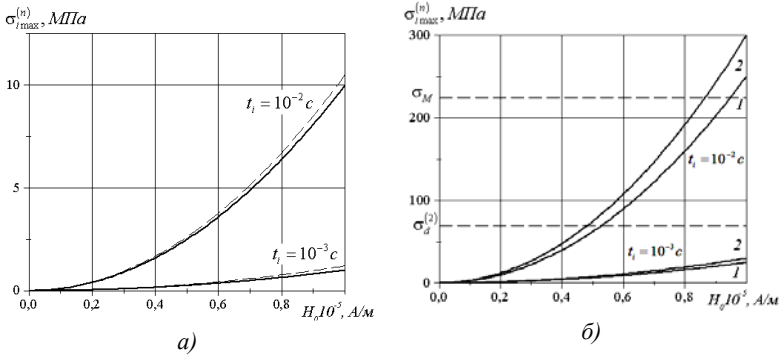


Рис. 3. Залежності максимальних значень  $\sigma_i^{\max}$  інтенсивностей напружень від величини  $H_0$

Залежності  $\sigma_i^{\max}$  для тривалостей  $t_i = 10^{-3} \text{с}$ ,  $10^{-2} \text{с}$  дії в РІМС, приведені на рис. 3,а, відповідають частоті  $\omega = \omega_*$ , а на рис. 3,б — частоті  $\omega = \omega_{r1}$ . Суцільні лінії на рис. 3,а відповідають першому, сталевому, а штрихові — другому, мідному, шарам.

**Висновки.** Записані співвідношення математичної моделі КОЕТ дають можливість визначення термонапруженого стану і несучої здатності КОЕТ за дії зовнішніх ІЕМП. На основі отриманих в роботі залежностей максимальних значень інтенсивностей напружень в розглядуваному біметалевому циліндрі від амплітудно-частотних характеристик електромагнітної дії в РІМС встановлено:

- а) за частоти електромагнітних коливань несучого сигналу поза околом резонансних частот несуча здатність та властивості контактного з'єднання розглядуваного циліндра зберігаються;
- б) за частоти електромагнітних коливань, рівний першій резонансній частоті ЕМП розглядуваний біметалевий циліндр втрачає несучу здатність і властивості контактного з'єднання за тривалості  $t_i \geq 7 \cdot 10^{-3} c$ .

### Список використаних джерел:

1. Батыгин Ю. В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский, Л. Т. Хименко. — Харьков : МОСТ — Торнадо, 2003. — 288 с.
2. Бурак Я. Й. Термопружність електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів / Я. Й. Бурак, О. Р. Гачкевич, Р. С. Мусій // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2006. — Вип. 49, № 1. — С. 75–84.
3. Гачкевич О. Р. Термомеханіка неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди / О. Р. Гачкевич, Р. С. Мусій, Д. В. Тарлаковський. — Львів : СПОЛОМ, 2011. — 216 с.
4. Грибанов В. Ф. Связанные и динамические задачи термоупругости / В. Ф. Грибанов, Н. Г. Паничкин. — М. : Машиностроение, 1984. — 184 с.
5. Ионоу В. Н. Напряжения в телах при импульсивном нагружении / В. Н. Ионоу, П. М. Огибалов. — М. : Высш. школа, 1975. — 463 с.
6. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. — М. : Наука, 1970. — 940 с.
7. Термонапруженное состояние и несущая способность биметаллических цилиндров при импульсных электромагнитных воздействиях / Р. С. Мусій [и др.] // *Теоретическая и прикладная механика.* — 2013. — № 6 (52). — С. 89–98.
8. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми: монографія / Р. С. Мусій. — Львів : Растр-7, 2010. — 216 с.
9. Подстригач Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1976. — 312 с.
10. Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применение / под ред. Ф. Херлаха. — М. : Мир, 1988. — 456 с.
11. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм — М. : Наука, 1976. — 616 с.
12. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач [и др.] — К. : Наук. думка, 1977. — 248 с.

A mathematical model of analyzing a thermal stress state, load capacity, and properties of contact connection of components of piecewise ho-

mogenous conducting body under the influence of pulsed electromagnetic fields. The initial ratios of the thermodynamics of the body during movement and stresses have been recorded. The boundary conditions on key functions on both outside surfaces of the body and on contact surfaces between its components have been formulated. An example of numerical analysis of the load capacity of a long bimetallic empty cylinder under the influence of an electromagnetic field with pulsed modulating signal on the first resonance frequency and beyond resonance frequencies.

**Key words:** *mathematical model, thermomechanics, piecewise homogenous conducting body, pulsed electromagnetic field, load capacity, properties of the contact connection.*

Отримано: 15.06.2016

УДК 658.5:004.94

**Ю. А. Романенков**, канд. техн. наук,

**В. М. Варганян**, д-р техн. наук,

**Т. Г. Зейниев**

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков

### **ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В СИСТЕМЕ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ ОРГАНИЗАЦИИ**

Рассмотрена задача оптимального распределения инвестиционных ресурсов между отдельными бизнес-процессами организации. Учтена интервальная неопределенность экспертных оценок, характерная для отраслевого экспертного опроса. Предложен интервальный вариант матричной модели оценки уровня относительной эффективности иерархической системы бизнес-процессов в организации, который позволил свести задачу оптимального распределения ресурсов к задаче линейного программирования с интервально заданной целевой функцией. Предложена интервальная модификация аппарата нормированных диаграмм в качестве графоаналитического средства анализа.

**Ключевые слова:** *интервальная оптимизационная модель, распределение ресурсов, эффективность бизнес-процессов, задача линейного программирования.*

**Введение.** Проблема эффективного стратегического управления организацией чрезвычайно многогранна и многослойна. Сложность объекта управления, противоречивость внутренних многосвязных процессов неизбежно порождает массу моделей и методов, призванных решать задачу управления таким объектом в условиях неопреде-