

УДК 519.6

**О. О. Ситник**, канд. техн. наук

Черкаський державний технологічний університет, м Черкаси

## **ДЕЯКІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ І-ГО РОДУ У ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ**

Досліджено можливість розв'язання задачі відновлення сигналів із застосуванням інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду. Показано, що використання багатокрокових алгоритмів при розв'язанні рівнянь Вольтерри першого роду дає змогу отримувати більш точний результат порівняно з методами, що базуються на застосуванні простих квадратурних формул.

**Ключові слова:** *відновлення сигналів, інтегральні рівняння Вольтерри І-го роду, багатокрокові алгоритми.*

**Вступ.** Задача відновлення вхідних впливів полягає в тому, що за заданою моделлю динамічного об'єкту

$$Ay = f \tag{1}$$

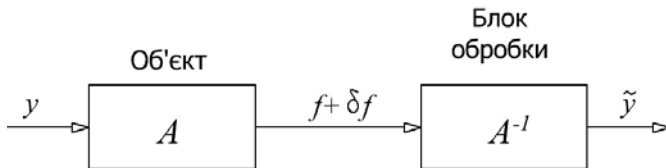
і експериментально отриманому вихідному сигналі у визначається вхідний сигнал  $f$ . Оператор  $A$  відображає динамічні властивості об'єкта і може бути представлений у вигляді диференціального оператора, що є, наприклад, сумою операцій диференціювання, тобто модель (1) є диференціальним рівнянням. Якщо ж оператор  $A$  є інтегральним оператором довільної складності (зокрема, сумою операцій інтегрування різної кратності), то (1) є інтегральним рівнянням. Можливе змішане подання оператора  $A$  у вигляді комбінації диференціальних та інтегральних операторів, тобто в цьому випадку (1) є інтегродиференціальним рівнянням.

**Постановка задачі.** Розв'язання задачі відновлення полягає в отриманні і чисельної реалізації оператора, зворотного оператору  $A$ , тобто в застосуванні співвідношення

$$\tilde{y} = A^{-1}(\tilde{f}), \tag{2}$$

де  $\tilde{y}$  і  $\tilde{f}$  – відповідно, обтяжені завадами (похибками) вхідний і виміряний вихідний сигнали.

Реалізацію оператора  $A^{-1}$  в реальних технічних системах виконують комп'ютерними засобами, тобто програмно або апаратно (спеціалізованими обчислювачами). Структура системи об'єкт — блок обробки вихідного сигналу з помилкою в  $f$  наведена на рис. 1. Ця система з певним наближенням вирішує задачу відновлення вхідного сигналу, динамічно спотвореного перетворювальними властивостями об'єкта



*Рис. 1. Загальна схема реалізації завдання відновлення вхідного впливу*

Розглянуту схему обробки вихідного сигналу широко застосовують у системах реєстрації сигналів (вимірювальних системах) і в більш складних системах обробки інформації, таких як системи контролю, діагностики, управління, тобто в системах, що працюють у реальному часі. Труднощі, що виникають при цьому, визначаються некоректністю математичної задачі зворотного оператора  $A$ , тобто принципово нестійкою задачею розв'язання рівняння (1). Для успішного розв'язання задачі відновлення необхідно застосовувати методи регуляризації [1, 2] і розробляти стійкі і точні алгоритми їх чисельної реалізації. Вибір методу регуляризації і якість розроблених чисельних алгоритмів істотно залежать від властивостей кожної конкретної розв'язуваної задачі, зокрема від застосованого виду математичної моделі динамічного об'єкта. Прийнятий у даній роботі підхід ґрунтується на застосуванні інтегральних динамічних моделей, тобто в цьому випадку залежність (1) є інтегральним рівнянням.

Основним видом інтегральної моделі задачі відновлення вхідного сигналу динамічного об'єкта є рівняння Вольтерри I роду, що збігається за структурою з оператором Вольтерри. Відмінність полягає в тому, що оператор Вольтерри є моделлю явного виду, описує «пряму» задачу аналізу і призначений для визначення реакції  $y(t)$  об'єкта на вхідний вплив  $x(t)$ . Та сама модель забезпечує визначення вхідного сигналу  $x(t)$  за відомою реакцією  $y(t)$ , однак при цьому необхідно розв'язувати інтегральне рівняння щодо функції  $x(t)$ , що входить під знак інтеграла.

Непараметричні моделі динамічних об'єктів у формі інтегральних операторів і рівнянь є самостійним видом математичного опису задач динаміки. На відміну від параметричних моделей, для формування яких як вихідні дані використовують задані параметри об'єкта, непараметричні динамічні моделі формуються на основі заданих динамічних характеристик об'єкта або його елементів. Динамічні характеристики являють собою функціональні залежності, які можуть бути отримані у вигляді експериментальних даних або в аналітичному вигляді. Застосування непараметричних динамічних моделей дає змогу розширити коло ефективно розв'язуваних дослідних і проектних задач.

Основним підходом до реалізації інтегральних моделей є можливість використання квадратурних алгоритмів відновлення вхідних

впливів на основі розв'язання рівнянь Вольтерри I роду. Такий підхід є ефективним, його застосовують на практиці. Однак при цьому виникають певні труднощі, викликані низкою особливостей у застосуванні квадратурних алгоритмів розв'язання і пов'язані з некоректністю зазначеної задачі, що має особливості [3].

У цій роботі пропонується до розгляду використання багатокрокових алгоритмів розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри I роду, які дають змогу отримувати високу точність результатів під час розв'язання задачі відновлення.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо лінійне інтегральне рівняння I роду типу Вольтерра

$$\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x \in \beta = [0, T] \quad (3)$$

з ядрами

$$K(x,x) \neq 0 \quad \forall x \in \beta \quad \text{і} \quad f(0) = 0 \quad (4)$$

і

$$K(x,x) \equiv 0, \quad K'_x(x,x) \neq 0 \quad \forall x \in \beta, \quad f(0) = f'(0) = 0. \quad (5)$$

Як відомо з теорії інтегральних рівнянь, якщо права частина  $f(x)$  і ядро задовольняють певним умовам гладкості, то розв'язок  $\varphi(x)$  задачі (3) існує, є єдиним і, отже, задача (3) коректна за спеціально обраною парою просторів. Однак задача розв'язання рівняння (3) за наближено заданими функціями  $\tilde{f}(x)$ ,  $\tilde{K}(x,t)$  є некоректною.

Відомі різні регуляризаційні алгоритми (р.а.) для стійкого розв'язання рівняння (3) [1, 4]. У [5] показано, що при використанні однокрокових методів, що ґрунтуються на найпростіших формулах прямокутників, породжуються регуляризаційні алгоритми, в яких параметром регуляризації є крок дискретизації. Однак однокрокові методи мають низький порядок збіжності. Задача побудови стійких методів високого порядку точності є нетривіальною.

У роботах [6, 7] для чисельного розв'язання задачі (3), (4) запропонована загальна схема побудови лінійних багатокрокових методів, заснована на використанні формул типу Адамса. Взявши за основу ці роботи, розглянемо задачу стійкої побудови каркасів наближених розв'язків інтегральних рівнянь Вольтерра I роду.

1. *Алгоритми для випадку*  $K(x,x) \neq 0$ . Введемо на  $[0, T]$  рівномірну сітку  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n+1$ , де  $h = T/(n+1)$  і позначимо через  $\varphi_i^h$  наближення до точного розв'язання  $\varphi(x_i)$  в точці  $x_i$ . Важливий клас чи-

сельних методів наближеного розв'язання рівняння Вольтерри отримуюмо через дискретизацію в (3) за допомогою сімейства квадратурних формул, тобто через заміну (3) на систему рівнянь з трикутною матрицею

$$h \sum_{v=0}^{i+1} \omega_{i+1,v} K(x_{i+1}, x_v) \varphi_v^h = f(x_{i+1}), \quad i = q, \dots, n, \quad (6)$$

де  $\varphi_s^h, s = 0, 1, \dots, q$  — задані початкові значення, а  $\omega_{i+1,v}$  — ваги квадратурної формули.

При конструюванні багатокрокових методів високої точності не всі інтерполяційні квадратурні формули придатні, наприклад, типу Сімпсона і Грегорі. Багатокрокові збіжні методи мають вигляд (6), вони побудовані в роботі [9], де використано модифікації інтерполяційних формул і циклічно різні квадратурні формули відповідно.

На відміну від методу (6), багатокрокові збіжні методи, засновані на використанні «екстраполяційних» формул типу Адамса, побудовані в [6, 7]. Загальна форма запису багатокрокових методів, що використовують ці формули, має вигляд:

$$h \sum_{v=0}^i \omega_{i+1,v} K(x_{i+1}, x_v) \varphi_v^h = f(x_{i+1}), \quad i = q, \dots, n, \quad (7)$$

де  $\varphi_0^h, \dots, \varphi_{q-1}^h$  — задані початкові значення, а  $\omega_{i+1,v}$  — ваги квадратурної формули.

Для вибору ваги  $\omega_{i+1,v}$  будемо розглядати такі квадратурні формули:

$$\int_0^{x_{i+1}} y(t) dt = \int_0^{x_q} y(t) dt + \sum_{j=q}^i \int_0^{x_{j+1}} y(t) dt = h \sum_{v=0}^q a_v y(x_v) + \widehat{r}_q(y) + \sum_{j=q}^i \left( h \sum_{v=0}^q b_v y(x_{j-v}) + r_{j+1}(y) \right) = h \sum_{v=0}^i \omega_{i+1,v} y(x_v) + R_{i+1}(y). \quad (8)$$

Тут  $a_v$  — ваги квадратурної формули Ньютона-Котеса з  $q+1$  вузлом, а ваги  $b_v$  можуть бути знайдені єдиним способом із системи рівнянь

$$\sum_{v=0}^q b_v (-v)^j = \frac{1}{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, q, \quad 0^0 = 1. \quad (9)$$

При такому виборі ваги  $r_{j+1}(y) = h^{q+2} y^{(q+1)}(x_j) C_{q+1} + O(h^{q+3})$ , де

$C_q = \frac{1}{q!} \int_0^1 a(a+1) \dots (a+q-1) da$ , а  $\widehat{r}_q(y) = O(h^{q+2})$  і, отже, метод має

похибку апроксимації  $R_{i+1}(y) = O(h^{q+1})$ .

Перейдемо до збіжності методу (7) з довільним параметром  $q$ . Як і при розв'язанні диференціальних рівнянь, властивості стійкості методів розв'язання інтегральних рівнянь можна пов'язати з характеристичним поліномом

$$\rho(\theta) = \sum_{v=0}^q b_v \theta^{q-v}.$$

Будемо вважати, що метод (7) задовольняє сильну кореневу умову, якщо всі корені полінома знаходяться точно всередині одиничного кола.

Умову збіжності формулюємо таким чином. Нехай

$$K(x, t) \in C_{\Omega}^{(q+2)} \left( \Omega = \{(x, t), 0 \leq t \leq x \leq T\} \right),$$

$$K(x, x) \neq 0 \quad \forall x \in \beta, \quad \varphi(x) \in C_{\beta}^{(q+1)}, \quad f(0) = 0$$

і початкові значення задані з точністю  $O(h^{q+1})$ . Тоді, якщо метод (7), заснований на формулі (8), задовольняє сильну кореневу умову, то він збігається з порядком  $q+1$ , тобто

$$\max_{0 \leq i \leq n} \left| \varphi_i^h - \varphi(x_i) \right| = O(h^{q+1}).$$

Використовуючи критерій Рауса-Гурвіца [11], неважко показати, що метод (7) задовольняє сильну кореневу умову для  $q = 0, 1, \dots, 5$ . Метод не задовольняє, починаючи з  $q \geq 6$ .

Методи виду (7), що використовують квадратурні формули (8), вимагають спеціальних процедур для початку обчислень. Для обчислення початкових значень  $\varphi_s^h$  з точністю  $O(h^u)$  можна скористатися неявним методом типу Рунге-Кутта, запропонованим у [8].

2. Побудова багатокрокових методів для випадку  $K(x, x) \equiv 0$ .

Розглянемо випадок  $K(x, x) \equiv 0$ ,  $K'_x(x, t)|_{t=x} \neq 0 \quad \forall x \in \beta$ . У [7] показано, що для розв'язання таких класів задач може бути застосований метод, що ґрунтується на квадратурних формулах, непридатних у стандартному випадку, таких, як формула Сімпсона і Грегорі I і II порядку. Збіжні методи ґрунтуються на комбінації формули Сімпсона з правилом 3/8, побудовані також у [9]. Покажемо, що можна узагальнити методи (7) для розв'язання задач (3), (5) і далі побудуємо збіжні методи високого порядку точності, які ґрунтуються на інтерполяційних формулах типу Адамса.

Щоб визначити, які квадратурні формули породжують збіжні методи, розглянемо модельну задачу

$$\int_0^x (x-t)\varphi(t) dt \equiv 0, \quad \varphi(x) \equiv 0. \quad (10)$$

Застосовуючи метод (7), заснований на формулі (8) до (10), отримаємо  $\varphi_s^h, 0 \leq s \leq q-1$ ,

$$h \sum_{v=0}^q a_v (x_{i+1} + x_v) \varphi_v^h - h \sum_{j=q}^i \sum_{v=0}^q b_v (x_{i+1} - x_{j-v}) \varphi_{j-v} = 0. \quad (11)$$

З (11) нескладно отримати різницеве рівняння  $q$ -го порядку з постійними коефіцієнтами

$$b_0 \varphi_i^h + \sum_{v=1}^q \{(v+1)b_v - (v-1)b_{v-1}\} \varphi_{i-v}^h - qb_q \varphi_{i-1-q}^h = 0.$$

Таким чином, збіжність методу (7) буде залежати від нулів полінома

$$\rho(\theta) = b_0 \theta^{q+1} \sum_{v=1}^q \{(v+1)b_v - (v-1)b_{v-1}\} \theta^{q+1-v} - qb_q. \quad (12)$$

Нехай  $K(x, t) \in C_{\Omega}^{(q+3)}$ ,  $K(x, x) \equiv 0$ ,  $K'_x(x, x) \neq 0 \forall x \in \beta$ ,  $\varphi(x) \in C_{\beta}^{(q+1)}$ ,  $f(0) = f'(0) = 0$  і початкові умови  $\varphi_s^h, 0 \leq s \leq q-1$  задані з точністю  $O(h^q)$ . Тоді, якщо метод (7), заснований на формулі (8), задовольняє сильну кореневу умову, то він збігається з порядком  $q$ , тобто

$$\max_{0 \leq i \leq n} |\varphi_i^h - \varphi(x_i)| = O(h^q).$$

Визначимо максимальний порядок точності методу (7). Вважаючи в (12)  $q = 1$  ( $b_0 = 3/2, b_1 = -1/2$ ), одержимо характеристичне рівняння

$$3\theta^2 - 2\theta + 1 = 0,$$

корені якого знаходяться точно всередині одиничного кола. При  $q = 2$  ( $b_0 = 23/12, b_1 = -16/12, b_2 = 5/12$ ), матимемо

$$23\theta^3 - 32\theta^2 + 31\theta - 10 = 0, |\theta_i| < 1, i = 1, 2, 3.$$

Проте, вже при  $q = 3$  ( $b_0 = 55/24, b_1 = -59/24, b_2 = 37/24, b_3 = -9/24$ ) корені рівняння

$$55\theta^4 - 118\theta^3 + 170\theta^2 - 110\theta + 27 = 0$$

не знаходяться всередині одиничного кола.

Таким чином, багатокроковий метод (7), заснований на формулі (8), відповідає сильній кореневій умові для  $q = 1, 2$  і, отже, максимально можливий порядок точності методу (7) дорівнює двом.

3. Для побудови *методів високої точності* розглянемо інтерполяційну формулу типу Адамса

$$\int_0^{x_{i+1}} y(t) dt = \int_0^{x_q} y(t) dt + \sum_{j=q}^i \int_{x_j}^{x_{j+1}} y(t) dt = \left\{ h \sum_{v=0}^q a_v y(x_v) + \widehat{r}_q(y) \right\} + \quad (13)$$

$$+ \sum_{j=q}^i \left\{ h \sum_{v=-1}^q b_v y(x_{j-v}) + r_{j+1}(y) \right\} = h \sum_{v=0}^{i+1} \omega_{i+1,v} y(x_v) + R_{i+1}(y).$$

Тут  $a_v$  — ваги квадратурної формули Ньютона-Котеса з  $q+1$  вузлом, а ваги  $b_v$  визначаються однозначно із системи рівнянь [9]

$$\sum_{v=-1}^q b_v (-v)^j = \frac{1}{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, q+1. \quad (14)$$

При такому виборі ваг, маємо

$$r_{j+1}(y) = h^{q+3} y^{(q+2)}(x_j) C_{q+2} + O(h^{q+1}),$$

де

$$C_{q+1} = \frac{1}{(q+1)!} \int_{-1}^0 a(a+1)\dots(a+q) da, \quad \widehat{r}_q(y) = O(h^{q+2}).$$

Отже,  $R_{i+1}(y) = O(h^{q+2})$

Формула (13), де ваги  $b_v$  визначаються формулою (14), відповідає квадратурній формулі Грегорі [10]. Очевидно, що використання формули Грегорі (13) щодо функції  $y(t) = K(x, t)\varphi(t)$  через умову  $K(x, x) \equiv 0$  призводить до трикутної системи рівнянь виду (7) для наближеного знаходження  $\varphi_i^h$ .

Знову застосовуючи метод (7), заснований на формулі (13), щодо задачі (10) можна з'ясувати, що збіжність методу буде залежати від нулів полінома

$$\rho(\theta) = \sum_{v=0}^q \left\{ (v+1)b_v - (v-1)b_{v-1} \right\} \theta^{q+1-v} - qb_q. \quad (15)$$

Нехай  $\varphi(x) \in C_\beta^{q+2}$ ,  $K(x, t) \in C_\Omega^{(q+4)}$ ,  $K(x, x) \equiv 0$ ,  $K'_x(x, x) = k \neq 0 \forall x \in \beta$ ,  $f(0) = f'(0) = 0$  і початкові значення  $\varphi_s^h$ ,  $s = 0, 1, \dots, q-1$  задані з точністю  $O(h^q)$ . Можна показати що, якщо всі корені полінома (15) знаходяться точно всередині одиничного кола, то метод (17), заснований на формулі (13), збігається з порядком  $q$ , тобто

$$\max_{0 \leq i \leq n} |\varphi_i^h - \varphi(x_i)| = O(h^q).$$

Таким чином, метод (7), заснований на формулі Грегорі  $q$ -го порядку, збігається зі швидкістю  $O(h^q)$ , якщо початкові значення задані з точністю  $O(h^q)$ .

У табл. 1 виписані характеристичні рівняння для  $q = 1, \dots, 5$ .

Таблиця 1

*Результати аналізу збіжності методу*

Порядок точності	Вид характеристичного рівняння
$q = 1$	$13\theta^2 - 2\theta + 1 = 0$
$q = 2$	$14\theta^3 - 5\theta^2 + 4\theta - 1 = 0$
$q = 3$	$299\theta^4 - 176\theta^3 - 194\theta^2 - 96\theta + 19 = 0$
$q = 4$	$317\theta^5 - 266\theta^4 + 374\theta^3 - 276\theta^2 - 109\theta - 18 = 0$
$q = 5$	$84199\theta^6 - 92922\theta^5 + 157973\theta^4 - 155852\theta^3 + 92193\theta^2 - 30426\theta - 1315 = 0$

**Стійкість багатокрокового методу щодо збурень вихідних даних.** У більшості додатків інтегральних рівнянь Вольтерри замість  $f$  і  $K$  задані наближення  $\tilde{f}$  і  $\tilde{K}$  такі, що  $\|\tilde{f} - f\|_c \leq \delta$ ,  $\|\tilde{K} - K\|_c \leq \tau$ . Потрібно за даними  $\tilde{f}$  і  $\tilde{K}$  відновити стійкий каркас наближених розв'язків задач (3), (4) або (3), (5). Проведемо аналіз стійкості багатокрокового методу щодо збурень вихідних даних.

Розглянемо випадок, коли ядро задано точно, а замість точної правої частини  $f$  задана безперервна функція  $\tilde{f}$  така, що  $\|\tilde{f}(x) - f(x)\|_c \leq \|\delta(x)\|_c \leq \delta$ .

Спочатку перейдемо до дослідження стійкості наближеного розв'язку задачі (3), (4), отриманого методом (7), що ґрунтується на формулі (8).

Нехай каркас наближеного розв'язку знаходиться з трикутної системи рівнянь

$$h \sum_{v=0}^i \omega_{i+1,v} K(x_{i+1}, x_v) \varphi_v^\delta = \tilde{f}(x_{i+1}), \quad i = q, \dots, n, \quad (16)$$

де  $\varphi_0^h, \dots, \varphi_{q-1}^h$  — задані початкові значення,  $\omega_{i+1,v}$  — ваги квадратурної формули.

Знайдемо оцінку похибки методу (16). Вважаючи  $\varepsilon_i^\delta = \varphi_i^\delta - \varphi(x_i)$  і записуючи рівняння помилки у вигляді



$$h \sum_{v=0}^i a_v K_{i+1,v} \varepsilon_i^\delta + h \sum_{j+q}^i \sum_{v=0}^q b_v K_{i+1,j-v} \varepsilon_{j-v}^\delta = R_{i+1} + \delta_{i+1},$$

можна показати, що

$$\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^\delta| \leq c_1 h^{q+1} + c_2 \frac{\delta}{h}, \quad (17)$$

де  $c_i$  — постійні незалежні від  $h$ .

З оцінки (17) видно, що перший доданок характеризує точність методу, зменшується зі зменшенням  $h$ , а другий доданок, пов'язаний з похибкою вихідних даних, навпаки, зростає.

З (17), вибираючи  $h(\delta) \approx \delta^{\frac{1}{q+2}}$ , знаходимо

$$\max_i |\varphi_i^\delta - \varphi(x_i)| = O(\delta^{\frac{q+1}{q+2}}). \quad (18)$$

Нехай виконані умови збіжності та  $\|\tilde{f}(x) - f(x)\|_c \leq \delta$ . Тоді багатокроковий метод, заснований на формулі (18) для  $q = 1, 2, \dots, 5$ ,

породжує р.а., причому справедлива оцінка (18), якщо  $h(\delta) \approx \delta^{\frac{1}{q+2}}$ .

У роботах [5, 6] показано, що метод, заснований на формулі середніх прямокутників, дає порядок збіжності за  $\delta$ , що дорівнює  $2/3$ . У той самий час, метод, заснований на формулі (18), може давати найвищий порядок збіжності, що дорівнює  $6/7$ .

Для того, щоб побудувати стійкий розв'язок задачі (3), (5), використовуємо метод, заснований на формулі (13). При цьому оцінка похибки методу має вигляд

$$\max_i |\varphi_i^\delta - \varphi(x_i)| = c_1 h^q + c_2 \frac{\delta}{h^2}, \quad c_1, c_2 = \text{const}. \quad (19)$$

Таким чином, для досить малого  $\delta$ , вибираючи  $h(\delta) \approx \delta^{\frac{1}{q+2}}$ , матимемо оцінку похибки р.а.

$$\max_{0 \leq i \leq n} |\varphi_i^\delta - \varphi(x_i)| = O(\delta^{\frac{q}{q+2}}), \quad q = 1, \dots, 4.$$

Числові результати.

**Приклад 1.** Як приклад розглянемо задачу [6],

$$\int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = 1 - \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

яка має розв'язок  $\varphi(x) = x$ . У табл. 2 наведено максимальні похибки розв'язків для  $h$ , що дорівнює 0.1, 0.05, 0.025, 0.02.

Таблиця 2

*Залежність максимальної похибки розв'язку від кроку дискретизації*

$q$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.02$
1	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$
2	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$
3	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$
4	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$6,1 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$6,9 \cdot 10^{-9}$
5	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$4,5 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$	$3,9 \cdot 10^{-10}$

Результати табл. 2 показують  $q + 1$ -й порядок збіжності методу, але для  $q = 4, 5$  помітний ефект машинного округлення.

**Приклад 2.** Розглянемо задачу [7]

$$\int_0^x (1 - e^{-t-x}) \varphi(t) dt = x - 0,5(\sin x - \cos x - e^x), \quad 0 \leq x \leq 2,$$

яка має розв'язок  $\varphi(x) = 1 + \sin x$ . У табл. 3 наведено максимальні похибки розв'язку.

Таблиця 3

*Порівняння максимальних похибок розв'язку різними методами задачі відновлення*

Метод	$h = 0,1$	$h = 0,05$	$h = 0,025$	$h = 0,02$
А	$4,9 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$9,9 \cdot 10^{-3}$
Б	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$
В	$7,4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$
Г	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$
Д	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$
Е	$4,8 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$

З табл. 3 видно, що методи типу А — метод з  $q = 1$ , Б — Грегори I порядку, мають перший порядок збіжності, В — метод з  $q = 2$ , Г — Грегори II порядку, — другий порядок, Д — Грегори III порядку — третій порядок, Е — Грегори IV порядку — четвертий порядок збіжності.

**Висновок.** Аналіз багатокрокових квадратурних алгоритмів дав змогу встановити, що, виходячи з їх умов стійкості, можуть бути отримані можливості ефективного застосування квадратурних формул високого порядку точності, що підтверджують обчислювальні експерименти під час розв'язання модельних задач.

### Список використаних джерел:

1. Лаврентьев М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. И. Шишатский. — М. : Наука, 1980. — 285 с.
2. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1986. — 288 с.
3. Верлань А. Ф. Квадратурные алгоритмы моделирования измерительных преобразователей с распределенными параметрами / А. Ф. Верлань, М. В. Сагагов, А. А. Сытник // 36. наук. праць ПІМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. — 2000. — № 6. — С. 131–136.
4. Денисов А. М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода / А. М. Денисов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1975. — Т. 15. — № 4. — С. 1053–1056.
5. Апарцин А. С. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм / А. С. Апарцин, А. В. Бакушинский // Дифференциальные и интегральные уравнения. — Иркутск, 1972. — Вып. 1. — С. 248–258.
6. Тен Мен Ян. Линейные многошаговые методы для численного решения Вольтерра I рода / Тен Мен Ян // Методы оптимизации и исследование операций. — Иркутск : СЭМ СО АН СССР, 1984. — С. 254–257.
7. Тен Мен Ян. Метод типа Адамса-Башфорта для устойчивого решения интегральных уравнений Вольтерра I рода / Тен Мен Ян // Труды Всесоюзной школы-семинара по некорректно поставленным задачам. — Саратов, 1985. — С. 138–139.
8. Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов. О редукции к идеальному прибору в физике и технике / Г. И. Василенко. — М. : Сов. радио, 1979. — 272 с.
9. Andrade C. Convergence of linear multistep method for Volterra first kind equations with  $K(x, x) \equiv 0$  / C. Andrade, F. M. Bertoldi, S. Mckee // Computing. — 1981. — Vol. 27. — № 3. — P. 189–201.
10. Хеминг Р. В. Численные методы / Р. В. Хеминг. — М. : Наука, 1972. — 400 с.
11. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1970. — 720 с.

The possibility of solving the problem of restoration of signals using the Volterra integral equations of the first kind. It is shown that the use of multi-algorithms in solving Volterra equations of the first kind allows to obtain more accurate results compared to purpose-ladies based on the use of simple quadrature formulas.

**Key words:** *recovery signals Volterra integral equations I-go kind bahatokrokovy algorithms.*

Отримано: 22.04.2016