нами / І. В. Сергієнко, В. С. Дейнека // Наука та інновації. — 2005. — Т. 1, № 3. — С. 34–50.
13. Слупко О. М. Чисельне дослідження процесу напірної фільтрації в середовищі з тонкими каналами / О. М. Слупко, Я. Г. Савула, Л. М. Дяконюк // Метематичні машини і системи. — 2011. — № 2. — С. 137–142.
14. Слупко О. М. Комп'ютерне моделювання процесу напірної фільтрації у пористому середовищі з включеннями / О. М. Слупко, Я. Г. Савула, Т. І. Мандзак, Л. М. Дяконюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — 2010. — Вип. 4. — С. 180–187.
15. Keijzer Th. J. S. Chemical osmosis in natural clayey materials / Th. J. S. Keijzer // Geologica Ultraiectina. — 2000. — № 196. — 152 p.
16. Skopetskii V. V. Mathematical modeling of filtration consolidation of water-saturated randomly inhomogeneous soil masses / V. V. Skopetskii, L. V. Volokh // Cybernetics and System Analysis. — 2008. — Vol. 44, № 1. — P. 68–77.

The mathematical model of the filtration consolidation of soil with taking into acount available thin semipermeable inclusions has been formed. For the numerical solution of the problem has been used the finite element method. Number of numerical experiments has been conducted and influence of heat and salt transfer to distribution of excess pressures in the inhomogeneous soils has been detached.

**Key words:** *filtration consolidation, matching conditions, a semipermeable inclusion, method of finite element.*

Отримано: 26.04.2016

УДК 519.7

**О. В. Щирба**

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ В УМОВАХ ЗАХИСНИХ МАНЕВРІВ

Розглядаються задачі побудови математичних моделей для обчислення та оптимізації фазових траєкторій ЛА із оптимізованими маневрами.

**Ключові слова:** *оптимальне керування, моделювання динамічних систем.*

**Вступ.** Математично-комп'ютерні методи моделювання і оптимізації є ефективним інструментарієм для підвищення надійності та ефективності керованих систем. Математична модель керованого ЛА включає залежність його траєкторії від кутів атаки та ковзання і від швидкісних напорів та сили тяги, що визначається як реактивною витратою палива так і термодинамічними параметрами атмосфери. Збурення атмосфери та геометричні деформації ЛА призводять до локальних відхилень кутів атаки, відхилень вектора тяги реактивного двигуна та похибок датчиків навігаційної системи. Основні труднощі у побудові оптимального керування пов'язані із нелінійністю керованих систем, їх великою розмірністю, фазовими обмеженнями, неповнотою даних про параметри моделей та наявністю реальних збурень. Це змушує спрощувати постановку оптимізаційної задачі за допомогою апроксимації шуканих керувань у адекватно вибраних спрощених класах параметричних функцій. Успішному відшуканню адекватного класу параметричної функції керування допомагає поглиблене теоретичне дослідження властивостей оптимального керування у конкретній задачі. Наприклад, побудова оптимального керування зводиться до розв'язання відповідно спрощеної оптимізаційної задачі відшукання оптимальних значень параметрів керування у вибраному класі параметричних функцій. Методами розв'язуючих операторів задача побудови оптимального керування зводиться до простіших задач оптимізації керувань, які не включають фазових траєкторій керованих системи. Для обчислення траєкторії керованого ЛА можуть одночасно використовуватися декілька систем координат. Для розрахунку траєкторії польоту ракет із великою дальністю польоту використовують геоцентричні системи координат. Для розрахунку руху ЛА на АДТ використовують зв'язані з Землею топоцентричні системи координат, початок яких знаходиться на поверхні Землі. Для обчислення аеродинамічних сил і моментів використовують зв'язану систему координат, яка жорстко зв'язана з характерними елементами конструкції ЛА і переміщується разом з ними. Початок зв'язаної системи координат збігається з центром мас ЛА, а осі спрямовані вздовж характерних елементів її конструкції. Швидкісна система координат належить до напівзв'язаних систем координат, являє собою прямокутну праву систему відліку, за допомогою якої визначають траєкторію польоту ЛА, при дії на нього аеродинамічних сил у щільних шарах атмосфери. На практиці вважають, що початок швидкісної системи координат збігається з центром мас ЛА.

Керування складними системами в реальних умовах неповних даних здійснюється за допомогою оптимізації математичних моделей, оптимізації стратегій керування та підвищення тактико-технічних характеристик ЛА [1–4]. Прикладом підвищення тактико-технічних характеристик є розробка бойових ракет MIM-104 та ERINT для високо мобільної системи «Patriot» PAC-3, яка спроможна одночасно виявляти понад 100 повітряних цілей, неперервно супроводжувати вісім із них і одночасно здійснювати підготовку початкових даних для пуску та наведення на кожну ціль до трьох керованих ракет ERINT або MIM-104 із дальністю перехоплення аеродинамічних цілей до 80 км., балістичних цілей до 24 км на висотах до 24 км. і на швидкостях понад 2200 м/сек. До задач оптимального керування ЛА належить відшукання керувань, які максимізують ймовірність досягнення цілей на заданих термінальних множинах.

**Постановка задачі.** Побудова оптимізованих траєкторій включає розв'язання ряду задач оптимального керування. У задачі 1 потрібно знайти керування $u(t),\ t \in [t_0, T_1]$, яке максимізує відхилення

$$F(u,c) = (c, \overline{x}(T_1))$$

фазового стану ЛА $\overline{x}(T_1)$ у перший момент $T_1$ часу досягнення висоти радіо горизонту $h = H_1$ при заданих обмеженнях

$$\| V(T_1) \| \geq V_0$$

на швидкість $V(T_1)$ для вектора $c$ із координатами $c_1 = \cos\alpha$, $c_3 = \sin\alpha$, та $c_i = 0$ для всіх інших значень $i$, для випадково вибраного значення кута $\alpha$, рівномірно розподіленого на інтервалі $[0, 2\pi]$, та для значенням у момент часу $t$ фазового стану $\overline{x}(t)$, що визначається трьома координатами центру мас $(x(t), y(t), z(t))$ і трьома координатами вектора швидкості

$$dx(t)/dt = V_x(t),\ dy(t)/dt = V_y(t),\ dz(t)/dt = V_z(t)$$

в інерційній системі координат із початком координат у точці старту, віссю $OX$ направленою на горизонт цілі, віссю $OY$ направленою вверх вертикально до площини горизонту та віссю $OZ$ перпендикулярною до площини ($OX$, $OY$), що доповнює систему до правої. Значення висоти радіо горизонту $H_1$ визначається тим, що на висотах $h < H_1$ ЛА залишається непомітним для радіолокаторів.

Максимізація $F(u,c)$ для заданого значення $V_0$ здійснюється при обмеженнях

$$y(T_1) = H_1,\ \| V(T_1) \| \geq V_0.$$

У задачі 2 для заданого $F_0$ максимізуємо $V_y(T_1)$ при обмеженнях

$$y(T_1) = H_1,\ F(u,c) = F_0,\ V_x(T_1) = 0,\ V_z(T_1) = 0.$$

У задачі 3 знаходимо керування на інтервалі часу $t \in [T_1, T_2]$ для досягнення у момент $t = T_2$ випадково вибраного із заданої термінальної множини $X_2$ стану $x^T$.

У задачах оптимальної швидкодії потрібно знайти керування, яке переводить керовану систему із заданого початкового фазового стану $x(0)$ у заданий термінальний стан $x(T) = y(T)$ за мінімальний час $T > 0$, де $y(t)$ може бути ціллю рухомою.

**Результати дослідження.** Труднощі практичного розв'язання таких задач пов'язані із складними фазовими обмеженнями та складними обмеженнями на допустимі керування, що визначаються аеродинамічними характеристиками ракети і фізичними параметрами атмосфери та задаються таблицями даних натурних спостережень. Необхідний для побудови алгоритмів оптимального керування вектор прискорення

$$dV(t)/dt = (dV_x(t)/dt,\ dV_y(t)/dt,\ dV_z(t)/dt)$$

обчислюється за сумарною силою тяги двигуна ЛА та сил аеродинамічного опору $F(t) = (F_x(t), F_y(t), F_z(t))$ визначених у швидкісній системі координат, що задається віссю $OX_1$ у напрямку вектора швидкості $V(t)$, віссю $OY_2$ направленою вертикально вверх та віссю $OZ_3$ перпендикулярною до площини ($OX_1$, $OY_1$), що доповнює систему координат до правої системи.

Для обчислення траєкторій над поверхнею Землі використовується геоцентрична система із початком координат у центрі мас Землі, а для обчислення траєкторій ракет між планетами Сонячної системи використовують геліоцентричну систему координат із початком координат у центрі мас Сонця. У геоцентричній абсолютній системі віссю $O_0Y_0$ є вісь обертання Землі спрямована на північ, вісь $O_0Z_0$ лежить у площині екватора і спрямована на точку весняного рівнодення, а вісь $O_0X_0$ перпендикулярна до осі $O_0Y_0$ і спрямована на схід.

Значення сумарної сили $F(t)$ на ділянках траєкторії у атмосфері залежить від атмосферного розподілу тиску, щільності і температури атмосфери, кутів $(\alpha(t), \beta(t))$ орієнтації ЛА відносно швидкісної системи координат, кутів $(\theta(t), \psi(t))$ орієнтації швидкісної системи координат відносно вибраної інерційної системи координат, матриці $M(t)$ переходу від швидкісної до інерційної системи координат,

$$M_{11} = \cos(\psi(t))\cos(\theta(t)),\ M_{12} = \cos(\psi(t))\sin(\theta(t)),$$

$$M_{13} = -\sin(\psi(t)), M_{21} = -\sin(\theta(t)), M_{22} = \cos(\theta(t)), M_{22} = 0,$$

$$M_{31} = \sin(\psi(t))\cos(\theta(t)),\ M_{32} = \sin(\psi(t))\sin(\theta(t)),\ M_{33} = \cos(\psi(t)),$$

маси $m(t)$ ракети та сили земного тяжіння $G(t)$,

$$F_x(t) = \cos(\beta(t))\cos(\alpha(t))P(t) - C_1(t),$$

$$F_y(t) = \cos(\beta(t))\sin(\alpha(t))P(t) + C_2(t)\alpha(t)/(\alpha^2(t) + \beta^2(t))^{-1/2},$$

$$F_z(t) = -\sin(\alpha(t))P(t) - C_2(t)\beta(t)/(\alpha^2(t) + \beta^2(t))^{-1/2},$$

$$dV(t)/dt = M^T\left(t\right)F\left(t\right)/m\left(t\right)+G\left(t\right).$$

Для обчислення траєкторій ЛА за заданими керуваннями використовується інерційна стартова система координат *OXYZ* із початком координат у точці старту (на поверхні Землі), віссю *OX* направленою на лінію горизонту у напрямку на ціль (на термінальну точку), віссю *OY* направленою вертикально вверх і віссю *OZ*, яка доповнює інерційну систему координат до правої системи.

Нехай ЦМ ЛА знаходиться у точці з координатами $(x,y,z)$ в інерційній системі координат OXYZ, а вектор швидкості ЛА $(V_x,V_y,V_z) = (\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ дорівнює вектору $\overrightarrow{OD}$, визначеному точкою *D* із координатами

$$(V_x,V_y,V_z) = (\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

у стартовій системі координат *OXYZ*. Проекцію точки *D* на площину *OXZ* позначимо точкою *A*, проекцію на площину *OXY* — точкою *C*, а проекцію на координатну вісь *OX* — точкою *B*. Кут між вектором $\overrightarrow{OD}$ і площиною OXY позначимо через $\psi$, а кут між вектором $\overrightarrow{OC}$ і площиною OXZ позначимо через $\theta$. У такому випадку координати вектора швидкості $(V_x, V_y, V_z)$ у стартовій системі координат обчислюються за формулами:

$$V_z = \dot{z} = -DC = -OD\cdot\sin\psi = -V\sin\psi,$$
$$V_x = \dot{x} = OB = OC\cdot\cos\theta = OD\cdot\cos\psi\cdot\cos\theta = V\cos\theta\cos\psi,\cdot$$
$$V_x = \dot{y} = BC = OC\cdot\sin\theta = OD\cdot\cos\psi\cdot\sin\theta = V\sin\theta\cos\psi.$$

Аеродинамічні сили і моменти, які визначають фазову траєкторію ЛА, обчислюються у швидкісній системі координат, визначеній одиничними ортами $1_x$, $1_y$, $1_z$. Очевидно, орт $1_x$ є нормованим вектором швидкості, $\overrightarrow{1_x} = \dfrac{\overrightarrow{OD}}{\left|\overrightarrow{OD}\right|}$, із визначеними у стартовій системі координатами:

$$pr_z\overrightarrow{1_x} = pr_z\frac{\overrightarrow{OD}}{\left|\overrightarrow{OD}\right|} = \frac{\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{OD}\right|} = \frac{-\left|\overrightarrow{OD}\right|\cdot\sin\psi}{\left|\overrightarrow{OD}\right|} = -\sin\psi,$$

$$pr_x\overrightarrow{1_x} = pr_x\frac{\overrightarrow{OD}}{\left|\overrightarrow{OD}\right|} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OD}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{OD}\right|\cdot\cos\theta\cdot\cos\psi}{\left|\overrightarrow{OD}\right|} = \cos\theta\cdot\cos\psi,$$

$$pr_y\overrightarrow{1_x} = pr_y\frac{\overrightarrow{OD}}{\left|\overrightarrow{OD}\right|} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{OD}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{OD}\right|\cdot\sin\theta\cdot\cos\psi}{\left|\overrightarrow{OD}\right|} = \sin\theta\cdot\cos\psi.$$

Отже, за відомих значень кутів $\theta$ і $\psi$ координати вектора $1_x$ обчислюються за формулою

$$1_x = \left(\cos\theta \cdot \cos\psi, \sin\theta \cdot \cos\psi, -\sin\psi\right)^T .$$

Орт $1_y$ визначаємо як направлений вверх перпендикулярний до прямих $OD$ та $OC$ одиничний вектор $1_y$, заданий у стартовій системі координатами

$$pr_x \overrightarrow{1_y} = -\sin\theta,$$

$$pr_y \overrightarrow{1_y} = \cos\theta,$$

$$pr_z \overrightarrow{1_y} = 0,$$

тобто,

$$1_y = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)^T ,$$

а орт $1_z$ доповнює швидкісну систему координат до правої системи, тобто визначається у стартовій системі координатами

$$1_z = \left(\cos\theta \cdot \sin\psi, \sin\theta \cdot \sin\psi, \cos\psi\right)^T .$$

Беручи до уваги, що вектор прискорення $\dot{V}$ дорівнює вектору рівнодійної сили $F = (F_x, F_y, F_z)$, поділеної на масу $m$, $\dot{V} = \dfrac{F}{m}$ отримуємо систему диференціальних рівнянь, що описує рух центра мас ЛА у стартовій системі координат:

$$\dot{x} = V_x,\ \dot{y} = V_y,\ \dot{z} = V_z,$$

$$\dot{V}_x = \frac{F_x}{m},\ \dot{V}_y = \frac{F_y}{m},\ \dot{V}_z = \frac{F_z}{m}.$$

Для абсолютного значення швидкості $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ знайдемо похідну

$$\dot{V} = \left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\right)' = \frac{1}{V} \cdot \left(\frac{V_x F_x}{m} + \frac{V_y F_y}{m} + \frac{V_z F_z}{m}\right)' =$$

$$= \frac{F_x \cos\theta \cos\psi + F_y \sin\theta \cos\psi - F_z \sin\psi}{m}.$$

Використовуючи залежності $\theta = arctg\dfrac{CB}{OB} = arctg\dfrac{V_y}{V_x}$, знаходимо похідну

$$\dot{\theta} = \left(arctg\frac{CB}{OB}\right)' = \frac{\dfrac{F_y V_x}{m} - \dfrac{F_x V_y}{m}}{\left(V \cdot \cos\theta \cdot \cos\psi\right)^2 + \left(V \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi\right)^2} = \frac{F_y \cos\theta - F_x \sin\theta}{m \cdot V \cdot \cos\psi}.$$

Аналогічно знаходимо похідну

$$\dot{\psi} = \left( arctg \frac{-V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \right)' = -\left( \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \right)' / \left(1 + V_z^2 / \left(V_x^2 + V_y^2\right)\right) =$$

$$= -\frac{F_x \cdot \sin\psi \cdot \cos\theta + F_y \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta + F_z \cdot \cos\psi}{m \cdot V}.$$

За законом всесвітнього тяжіння на тіло масою $m$ на висоті $h$ над поверхнею Землі діє гравітаційна сила $mg = \frac{GMm}{(R_З + h)^2}$, де $M$ — маса Землі, а значення гравітаційної сталої $G = g_0 r^2 / M$ обчислюється із формули $g_0 = \frac{GM}{{R_З}^2}$ із відомим значенням гравітаційного прискорення $g_0$ на поверхні Землі. Звідси випливає, що гравітаційна складова прискорення у точці з координатами ($x$, $y$, $z$), заданими у стартовій системі координат, обчислюється за формулою

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}_0 = -\frac{g_0 R_З^2}{(x^2 + (y + R_З)^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y + R_З \\ z \end{pmatrix}.$$

Координати вектора сили тяги двигуна

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\beta P_{ДУ} \\ \sin\alpha \cos\beta P_{ДУ} \\ -\sin\beta P_{ДУ} \end{pmatrix}$$

визначаються у швидкісній системі координат за значенням $P_{ДУ}$ сили тяги двигуна і за значеннями кутів $\alpha$ і $\beta$ орієнтації ЛА відносно вектора швидкості. Значення сили тяги двигуна залежить від технічних характеристик двигуна, пального, швидкості та фізичних характеристик атмосфери (температури, тиску і густини повітря на висоті польоту $h$),

$$P_{ДУ} = P_h = P_\infty - S_a \cdot P_a\left(h\right) = I_{SP} \cdot \dot{G}\left(t\right) - S_a \cdot P_a\left(h\right),$$

де величиною

$$P_\infty = I_{SP} \cdot \dot{G}\left(t\right)$$

позначають значення сили тяги головного двигуна в вакуумі, а величиною $P_h$ позначають силу тяги головного двигуна в атмосфері на висоті $h$, $S_a$ — площа сопла, $P_a\left(h\right)$ — тиск атмосфери на висоті $h$, $I_{SP}$ — питомий імпульс, $\dot{G}$ — вагова секундна витрата ДУ. Значення перелічених величин, а також значення аеродинамічних сил

$$N = C_n \cdot q \cdot S\ ,$$
$$T = C_x \cdot q \cdot S$$

задаються табличними залежностями від багатьох факторів, зокрема, від сили швидкісного напору $q = \rho * V^2 / 2$ [кгс/м$^2$], залежної від густини атмосфери $\rho$ на висоті $h$ та від атмосферної швидкості $V$, визначеної в одиницях (махах)

$$M = V / a,$$

де $a = 20.0463\sqrt{T}$ , $T$ — температура атмосфери в Кельвінах, $a$ — швидкість звуку в повітрі при температурі $T$, а значення координат $A_x, A_y, A_z$ вектора аеродинамічних сил

$$A_x = -C_x \cdot q \cdot S\ ,\ A_y = C_n^{\alpha} \cdot q \cdot S \cdot \alpha,\ \ A_z = -C_n^{\alpha} \cdot q \cdot S \cdot \beta.$$

залежать від повітряної швидкості, геометричних розмірів ЛА, кутів орієнтації ЛА відносно вектора швидкості, фізичних параметрів атмосфери, площі міделевого перерізу $S$ та аеродинамічних коефіцієнтів $C_x$ і $C_n^{\alpha}$ ,

$$C_x = C_{x0}\left(M,G\right) + \Delta C_x\left(M,H\right) + B\left(M,G\right)\cdot\left(C_n^{\alpha}\left(M,G\right)\right)^2\cdot\left(\alpha^2+\beta^2\right).$$

Значення міделевої площі $S$ і значення аеродинамічних коефіцієнтів $C_x$ і $C_n^{\alpha}$ оцінюються експериментально за даними натурних спостережень.

Координати вектора сумарних сил $f = F + A$ у швидкісній системі координат обчислюються за формулами

$$f_x = \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot P_{ДУ} - C_x \cdot q \cdot S,$$

$$f_y = \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot P_{ДУ} + C_n^{\alpha} \cdot q \cdot S \cdot \alpha,$$

$$f_z = -\sin\beta\cdot P_{ДУ} - C_n^{\alpha} \cdot q \cdot S \cdot \beta,$$

а сумарна сила $F_{sum}$ у стартовій системі координат обчислюється за формулами

$$F_{sum} = 1_x f_x + 1_y f_y + 1_z f_z + gm = \begin{pmatrix} cos\theta\, cos\psi \\ \sin\theta\, cos\psi \\ -\sin\psi \end{pmatrix} f_x +$$

$$+\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} f_y + \begin{pmatrix} cos\theta\,\sin\psi \\ \sin\theta\,\sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix} f_z + g = M_0^V f + gm.$$

Із використанням матриці переходу

$$M_0^V = \begin{pmatrix} cos\theta\,\cos\psi & -\sin\theta & cos\theta\,\sin\psi \\ \sin\theta\,\cos\psi & cos\theta & \sin\theta\,\sin\psi \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}$$

прискорення ЛА обчислюється за формулою

$$\dot{V} = \frac{F_{sum}}{m} = \frac{M_0^V f}{m} + g,$$

а математична модель для обчислення фазової траєкторії ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $V_x(t)$, $V_y(t)$, $V_z(t)$) визначається системою диференційних рівнянь

$$\dot{x} = V_x,\ \dot{y} = V_y,\ \dot{z} = V_z$$

$$\dot{V}_x = \frac{f_x \cos\theta \cos\psi - f_y \sin\theta + f_z \cos\theta \sin\psi}{m} + g_x,$$

$$\dot{V}_y = \frac{f_x \sin\theta \cos\psi + f_y \cos\theta + f_z \sin\theta \sin\psi}{m} + g_y,$$

$$\dot{V}_z = \frac{-f_x \sin\psi + f_z \cos\psi}{m} + g_z,$$

$$\theta = arctg\frac{V_y}{V_x},\ \psi = arctg\frac{-V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}.$$

Беручи до уваги, що вектор похідних $(\dot{V}, \dot{\theta}, -\dot{\psi})$ обчислюється за формулами

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{cos\theta \cos\psi}{m} & \frac{\sin\theta \cos\psi}{m} & \frac{-\sin\psi}{m} \\ \frac{-\sin\theta}{mV\cos\psi} & \frac{cos\theta}{mV\cos\psi} & 0 \\ \frac{cos\theta \sin\psi}{m} & \frac{\sin\theta \sin\psi}{m} & \frac{\cos\psi}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = M_1 M_2 F =$$

$$= M_1 M_2 (M_0^V f + gm) = M_1 M_2 M_0^V f + M_1 M_2 gm.$$

із матрицями

$$M_1 = \begin{pmatrix} m^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (mV\cos\psi)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (mV)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} cos\theta \cos\psi & \sin\theta \cos\psi & -\sin\psi \\ -\sin\theta & cos\theta & 0 \\ cos\theta \sin\psi & \sin\theta \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix},$$

а також беручи до уваги, що добуток матриць $M_2 M_0^V$ є одиничною матрицею, маємо

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = M_1 f + M_1 M_2 gm =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{f_x}{m} + g_x cos\theta \cos\psi + g_y \sin\theta \cos\psi - g_z \sin\psi \\ \dfrac{f_y}{mV\cos\psi} + \dfrac{-g_x \sin\theta + g_y \cos\theta}{V\cos\psi} \\ \dfrac{f_z}{mV} + \dfrac{g_x cos\theta \sin\psi + g_y \sin\theta \sin\psi + g_z \sin\psi}{V} \end{pmatrix}$$

і отримуємо робочу модель

$$\dot{x} = V\cos\theta\cos\psi,\ \dot{y} = V\sin\theta\cos\psi,\ \dot{z} = -V\sin\psi,$$

$$\dot{V} = \frac{f_x}{m} + g_x cos\theta \cos\psi + g_y \sin\theta \cos\psi - g_z \sin\psi,$$

$$\dot{\theta} = \frac{f_y}{mV\cos\psi} + \frac{-g_x \sin\theta + g_y \cos\theta}{V\cos\psi},$$

$$\dot{\psi} = -\frac{f_z}{mV} - \frac{g_x cos\theta \sin\psi + g_y \sin\theta \sin\psi + g_z \sin\psi}{V}$$

підсистеми для обчислення фазової траєкторії

$$(x(t), y(t), z(t), V(t), \theta(t), \psi(t))$$

у фазовому просторі $(x, y, z, V, \theta, \psi)$.

**Висновки.** Отже, повна робоча модель для обчислення фазової траєкторії ЛА за заданими функціями керування задається системою диференціальних рівнянь і таблицями даних для обчислення всіх аеродинамічних сил і моментів.

$$\dot{x} = V_x,\ \dot{y} = V_y,\ \dot{z} = V_z,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{pmatrix} = \frac{M^T}{m} \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot P_{ДУ} - C_x \cdot q \cdot S \\ \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot P_{ДУ} + \dfrac{C_n^{\alpha} \cdot q \cdot S \cdot \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ -\sin\beta \cdot P_{ДУ} - \dfrac{C_n^{\alpha} \cdot q \cdot S \cdot \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{pmatrix} + \vec{g},$$

$$\theta = arctg\frac{V_y}{V_x},\ \psi = arctg\frac{-V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}},$$

$$V_x = \dot{x} = V\cos\theta\cos\psi,$$
$$V_x = \dot{y} = V\sin\theta\cos\psi,$$
$$V_z = \dot{z} = -V\sin\psi.$$

За допомогою методів внутрішньої точки [2] будуються прискорені алгоритми обчислення оптимального керування $u^{opt}(t) = (\alpha^{opt}(t), \beta^{opt}(t))$ та оптимізованих опорних траєкторій при наявних технічних обмеженнях

$$|\alpha| \le \alpha_{\max}\,,\ |\beta| \le \alpha_{\max}\,,$$
$$|\dot{\alpha}| \le \dot{\alpha}_{\max} = \alpha_{\Sigma\max}\cdot K_{\Omega}(q),\ \ |\dot{\beta}| \le \dot{\alpha}_{\max}\,,$$
$$|\ddot{\alpha}| \le \ddot{\alpha}_{\max} = \alpha_{\Sigma\max}\cdot K_{\varepsilon}(q),\ |\ddot{\beta}| \le \ddot{\alpha}_{\max}\,,$$
$$|\dddot{\alpha}| \le \dddot{\alpha}_{\max} = \alpha_{\Sigma\max}\cdot K_{\xi}(q),\ |\dddot{\beta}| \le \dddot{\alpha}_{\max}$$

за таблично заданими допустимими граничними значеннями

$$\alpha_{\max},\ \alpha_{\Sigma\max},\ K_{\Omega}(q),\ K_{\varepsilon}(q),\ K_{\xi}(q).$$

У загальній постановці оптимізаційні задачі зводяться до відшукання керування $u \in U$ із заданої множини $U$ допустимих керувань $U$, яке максимізує ймовірність переведення заданої керованої системи

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = f(\overline{x}(t), u(t))$$

із допустимої множини початкових фазових станів $\overline{x}(t_0) \in X^0$ на множину фінальних станів $\overline{x}(t_f) \in X^f$ при наявності фазових обмежень $\overline{\psi}(x) \le 0$, де множина $X^0$ визначається перетином термінальної множини $X(t_0, x(0))$ із заданою множиною $\{x \mid \varphi^0(x) = 0\}$, а множина $X^f$ є множиною фазових станів $x(t_f)$, для яких існує допустиме керування, що переводить керовану систему із стану $x(t_f)$ у заданий стан $x(T) = x^T$ із ймовірністю $p(x(t_f))$. У випадку задачі переслідування керування $u$ обчислюється за критерієм мінімізації часу $\overline{\overline{T}}$ досягнення нерівності $|\, x_i(\overline{\overline{T}}) - y_i(\overline{\overline{T}}) | \le \varepsilon$ для стану $y_i(\overline{\overline{T}})$ переслідуваної системи

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(y(t), v(t))$$

із допустимими керуваннями $v(t) \in V = \{v \mid g_V(v) \le 0\}$. У цьому випадку обчислюється екстремальне керування $\overline{\overline{u}}$ як розв'язок оптимізаційної задачі

$$\overline{\overline{T}} = \inf_{u(\cdot)\in U} \max_{v(\cdot)\in V} T_{uv}\ ,\ T_{uv} = \min\{t \mid x_i(t) = y_i(t), i \in I\}\ .$$

## Список використаних джерел:


1. Бейко І. В. Задачі, методи та алгоритми оптимізації / І. В. Бейко, П. М. Зінько, А. Г. Наконечний. — К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. — 799 с.
2. Згуровский М. З. Системный анализ: проблемы, методология, приложения / М. З. Згуровский, Н. Д. Панкратова. — К. : Наук. думка, 2011. — 728 с.
3. Игдалов И. М. Ракета как объект управления / И. М. Игдалов, Л. Д. Кучма, Н. В. Поляков, Ю. Д. Шептун. — Днепропетровск : АРТ-ПРЕСС, 2014. — 542 с.
4. Зенитный ракетный комплекс «Patriot». Многофункциональная РЛС AN/MPQ-53 [Електронний ресурс] / Вестник ПВО. — Режим доступа: http://pwo.guns/other/usa/patriot/index01.htm.


We consider problems of mathematical models design for calculation and optimization of AC phase trajectories with optimized maneuvers.

**Key words:** *optimal control, dynamic systems modeling.*

Отримано: 13.04.2016