УДК 004.32:532.5

С. А. Положаєнко, д-р техн. наук, професор,
В. С. Савіч, аспірант

Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РЕОЛОГІЇ ФРАКТАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТОВИХ СИСТЕМ

Досліджено умову «гладкості» фронту поділу складових неоднорідних (гетерогенних) систем на основі аналізу «стрибка» насиченості в функції Баклея-Леверета. Показано, що «стрибок» насиченості відсутній, а фронт поділу просувається стало та зберігає «гладкість», якщо рухомість компоненти, яка витискає, не перевищує рухомість компоненти, яка витискається. Також показано, що порушення «гладкості» фронту поділу призводить до фрактально-неоднорідної структури процесу реології. Отримано числові значення фрактальної розмірності фронту поділу для реологічного процесу, який розвивається у реальних геологічних умовах. Запропоновано математичну модель фрактально-неоднорідної системи в класі варіаційних нерівностей.

Ключові слова: *неоднорідна (гетерогенна) система, процес реології, фрактальна структура, фрактальний кластер, математична модель, варіаційна нерівність.*

Вступ. Останнім часом з'явилася низка робіт (наприклад, [1]) в яких досліджуються питання раніше не вивченого питання впливу процесу утворення фрактальних структур на фільтрацію внутрішньо пластових рідин. Цей вплив може здійснюватися за рахунок *фрактальної структури* пористого середовища [2] або самої системи рідин, що фільтруються та мають *неоднорідний* (*гетерогенний*) *характер* [3]. В роботі [2] стверджується, що перехід від лінійного закону фільтрації до нелінійного в значній мірі залежить від розподілу пор за розмірами або *фрактальності* пористого середовища (або, іншими словами: *самоподібності* структури пористого середовища, що зберігається у випадку зміни геометричних розмірів пор середовища). Разом з тим в роботі [3] показано, що гетерогенні рідини, зокрема, емульсії та системи багатофазних рідин, які не змішуються, мають динамічну фрактальну структуру, яка визначається взаємодією між частинками дисперсної фази.

Враховуючи зазначене вище, для практики важливим є визначення фрактальних характеристик ґрунтів пористого середовища та їх вплив на фільтрацію пластових рідин. Відомий ряд робіт з експериментального визначення *фрактальних розмірностей* пористих середовищ. Зокрема, в роботі [4] методом скануючої електронної мікроскопії визначено просторову фрактальну розмірність реального зразка пористого середовища, в [5] вперше запропоновано метод визначення фрактальної розмірності за експериментальною ізотермою адсорбції газу, який (метод) віднайшов свій розвиток в роботах [6, 7]. У роботах [8, 9] запропоновано непрямі способи визначення фрактальних характеристик пласта за кривими відновлення тиску [8] та реакції пластової системи на миттєву зміну тиску [9].

Одначе, у наведених роботах фрактальні властивості пористого середовища та їх вплив на фільтраційні процеси внутрішньо пластових рідин досліджувалися на основі натурних експериментів. Це ускладнено в практичній реалізації, оскільки вимагає проведення експериментів в умовах реальної пластової системи (або її фізичного відтворення при лабораторних дослідженнях), спеціального обладнання та суттєвих ресурсних витрат.

Розглядається перспективним, з точки зору часових та матеріальних витрат, застосування засобів математичного моделювання для дослідження фрактальних геологічних структур та реології (фільтрації рідин у пористому середовищі) фрактально-неоднорідних (що те саме: фатально-гетерогенних) пластових систем. Важливим етапом проведення математичного моделювання для зазначених задач є формування адекватної математичної моделі (ММ) досліджуваних процесів. В деяких роботах, наприклад, [10–12] започатковано спробу формалізації реології в пористих середовищах у випадку фрактальної структури останньої, одначе дані моделі отримано для ідеального лотка Хеле-Шоу та мають виключно теоретичне значення. При цьому слід зазначити, що на поточний момент в літературі не виявлено ММ, які описують реологічні процеси для рідких гетерогенних (в тому числі багатофазних) систем, і які забезпечують розв'язання практичних задач в умовах реальних фрактально-неоднорідних пластових структур.

Мета роботи. Розробка ММ реології багатофазних рідин, що не змішуються, у фрактально-неоднорідних пористих середовищах.

Основна частина. Важливим фактором фізичної картини реології багатофазних рідин, що не змішуються, зокрема, гетерогенних систем у фрактально-неоднорідних середовищах, є те [3], що при зменшенні взаємодії між частинками, внаслідок зниження концентрації дисперсної фази, фрактальна структура системи, яка фільтрується, зникає. Інакше кажучи, можна стверджувати, що, у даному випадку, процес реології носить *виражений спрямований характер*.

Як показано в низці робіт, наприклад [13], адекватним математичним описом реологічних процесів в пластових пористих середовищах з вираженою спрямованістю розвитку процесу є варіаційні нерівності. Виходячи з цього, у подальшому, будемо розробляти ММ процесу реології у фрактально-неоднорідних пористих середовищах в класі *варіаційних нерівностей у частинних похідних*.

1. Якісний опис процесу реології багатокомпонентної (гетерогенної) системи у пористому середовищі. Для багатофазних рідин (рідких систем), що фільтруються, важливим аспектом при моделюванні динаміки є визначення *фронту поділу* між окремими компонентами. Дана задача може мати також самостійне прикладне значення, наприклад, коли досліджується процес витискання однієї рідини іншою.

Припущення щодо «гладкості» фронту поділу компонент в багатофазній (а також у гетерогенній) системі можливо лише у випадку «близькості» фізико-хімічних властивостей цих компонент (або дрібнодисперсності та низької концентрації гетерогенної системи). В іншому випадку «гладкість» фронту порушується, а потік, що фільтрується, набуває фрактально-неоднорідну структуру зі «складним» фронтом поділу фаз. Ще більш складну картину реології набуває випадок, коли з границею Γ області моделювання Ω контактують різні компоненти багатофазної (суть — гетерогенної) системи.

У пластовій гідро-газодинаміці умовою, яка визначає границю поділу двох (для простоти подальшого розгляду) компонент багатофазного або гетерогенного потоку, що фільтруються, може слугувати «стрибок» *насиченості* S в функції Баклея-Леверета [14–16]

$$J(S)=\frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1)+\mu_2 k_2^0(S_2)}, \tag{1}$$

де $k_1^0(S_1)$ та $k_2^0(S_2)$ — відносні фазові проникності компонент, які фільтруються; μ_1 та μ_2 — їх густини; S_1 та S_2 — насиченості пористого простору компонентами, що фільтруються, відповідно.

Фізично «стрибок» насиченості зумовлено наявністю у однієї з компонент багатофазної системи напруги зсуву τ, який перевищує граничне значення ($\tau>\tau^*$). У літературі така компонента набула назву «такої, що витискає» [13–16]. Експериментально встановлено [14], що фронт поділу компонент багатофазної системи, яка фільтрується, просувається *стало* (тобто фрактально-неоднорідна структура процесу реології відсутня), якщо рухомість компоненти, яка витискає не перевищує рухомість компоненти, яка витискається, тобто

$$\frac{k_1(S_1)}{\mu_1}\le\frac{k_2(S_2)}{\mu_2}. \tag{2}$$

Даний випадок реології двокомпонентної системи (тобто з «гладкою» границею поділу) ілюструє рис. 1а, на якому представлено динаміку процесу фільтрації водо-нафтової суміші (вода — компонента, яка витискає, і вона займає світлу область; нафта — компонента, яка витискається, і вона займає темну область) між двома експлуатаційними свердловинами (їх позначено на малюнку чорними точками).

На практиці більш зручно користуватися виразом, отриманим з (2) діленням останнього на усереднену швидкість фільтрації ϖ

$$\frac{\partial P(t,z)}{\partial \eta} > 0, \quad \frac{\partial P_c(S)}{\partial \eta} > 0, \qquad (3)$$

де $P(t,z)$ задає внутрішньо пластовий (усереднений) тиск для компонент багатофазної системи, що фільтрується; $P_c(S)$ — капілярний тиск, зумовлений наявністю відмінних швидкостей фільтрації для компонент у багатокомпонентній системі; η — нормаль до градієнту внутрішньо пластового тиску $P(t,z)$ на границі Γ.

В іншому випадку швидкість фільтрації компоненти, яка витискається ϖ_2 вище швидкості зміни насиченості компоненти, яка витискає, що спричиняє утворення фрактально-неоднорідної структури процесу реології, тобто суттєвому порушенню «гладкості» фронту поділу (рис. 1б, 1в). При цьому фізична картина реологічного процесу характеризується появою «пальців» компоненти, яка витискає (рис. 1г, 1д). У граничному випадку, в потоці, що фільтрується, можливо, навіть, утворення «зон застою» [13, 14], які являють собою ділянки компоненти, яка витискається, з нульовою швидкістю фільтрації $\varpi_2 = 0$ (рис. 1е, 1ж, 1з). Іншими словами: компонента, яка витискається, «відступає» повільніше, ніж просувається компонента, яка витискає, що, фізично, й визначає механізм утворення фрактально-неоднорідної структури і, як наслідок, «зон застою».

Уявімо, що в момент часу $t = 0$ поверхня фронту поділу являє собою площину $F(z_i) = \Xi_0, i = 1,2$. Порушення сталості фронту поділу врахуємо у вигляді нестаціонарних збурень. Які порушують постійність насиченостей компонент S_j багатофазної системи ($j = 2$ — для двофазного випадку) в областях розповсюдження фронту та спотворюючи його «гладкість», що відобразиться наступним чином

$$F(z_i, t) = \Xi_0(t); i = 1,2, \qquad (4)$$

де z_i — відповідають координатам у незбуреній площині фронту поділу.

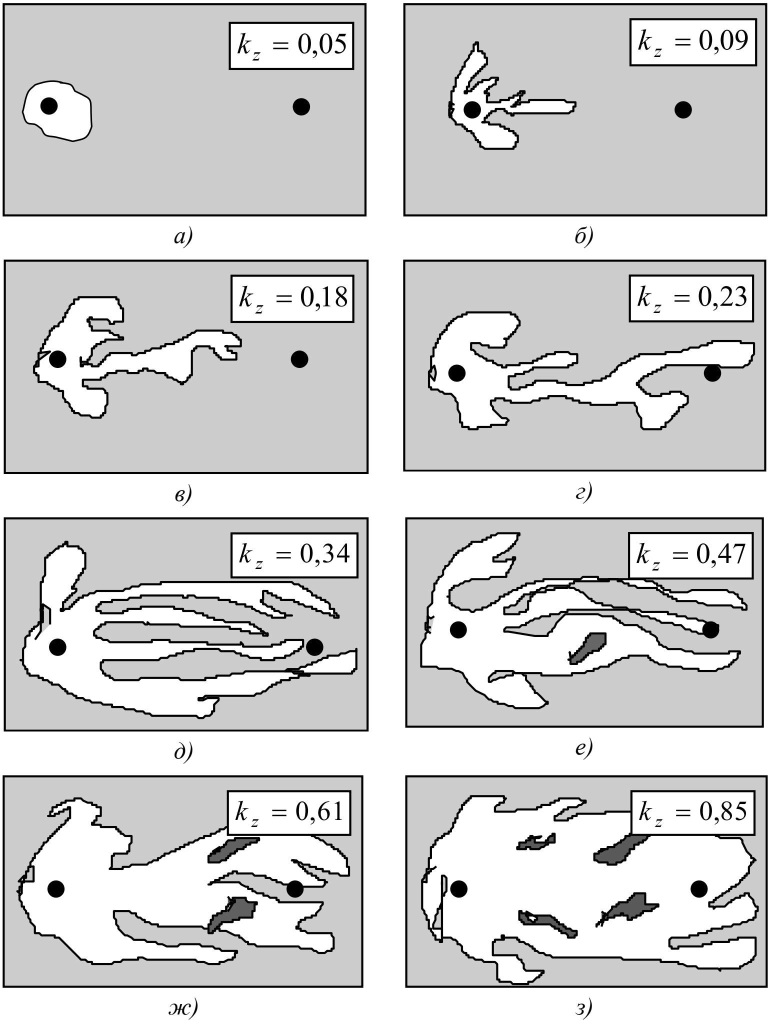

Рис. 1. *Картина реології двокомпонентної системи на прикладі водо-нафтової суміші при різних значеннях пропускної здатності* k_z *пористого середовища*

Виражена спрямованість розвитку процесу реології, що розглядається, про яку було зазначено вище, свідчить про його відхилення від лінійного закону Дарсі [14–16] (тобто щодо лінійної залежності швидкості фільтрації ϖ від градієнту внутрішньо пластового тиску $grad\left(P\right)$) та про можливу наявність граничного градієнта G, який зумовлює відсутність просування фронту поділу за ненульового значення внутрішньо пластового тиску (тобто $\varpi = 0$ при $P(t,z) \neq 0$; $grad(P) \leq G$). Формалізовано дане припущення представимо наступним чином (для двокомпонентного потоку, $j = 1,2$):

$$\varpi_j = -\frac{k_j(S_j)}{\mu_j}\left[grad(P_j) - \frac{G_j}{\left|grad(P_j)\right|}\right]; \ \left|grad(P_j)\right| > G_j,$$

$$\varpi_j = 0; \ \left|grad(P_j)\right| \leq G_j; \ j = 1,2. \qquad (5)$$

Рівняння динаміки вигляду (5) доповнимо рівняннями нерозривності (випадок двох компонент у багатофазній системі)

$$div(\varpi_j) - (-1)^j m\frac{\partial S_j}{\partial t} = 0; \ j = 1,2. \qquad (6)$$

Граничні умови (ГУ) на збуреній поверхні фронту поділу компонент (4), які виражають рівність тисків перед та за фронтом поділу, а також витрат

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \eta} = m\bar{\varpi}\left(S_1^h - S_1^f\right); \ \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} = m\bar{\varpi}\left(S_2^h - S_2^f\right)$$

визначено на незбуреній поверхні фронту витискання Ξ_0.

Очевидно, що для «гладкості» границі поділу необхідно обмеженість збурень на поверхні Ξ_0. Тоді для визначення збурень швидкостей, тисків та насиченостей отримаємо наступні вирази (в наведених нижче виразах збурення відповідних величин позначено знаком тильда, а незбурені величини позначено індексом 0):

$$\varpi_j = -\frac{k_j(S_j)}{\mu_j}J_0(S_j)\left[grad(\tilde{P}_j) - \frac{G_j}{\left|grad(\tilde{P}_j)\right|}\right]; \ \left|grad(\tilde{P}_j)\right| > G_j,$$

$$\varpi_j = 0; \ \left|grad(\tilde{P}_j)\right| \leq G_j; \ j = 1,2, \qquad (7)$$

з ГУ, які враховують обмежені збурення (або їх відсутність) на поверхні фронту $F(z_i) = \Xi_0; i = 1,2$

$$\frac{\partial \tilde{P}(t,z_i)}{\partial \eta} > 0, \ \frac{\partial \tilde{P}_c(S)}{\partial \eta} > 0; \ i = 1,2, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial \eta} = m\bar{\varpi}\left(S_j^h - S_j^f\right); \ j = 1,2. \qquad (9)$$

Таким чином, формулювання задачі про сталість фронту поділу компонент багатофазної системи фактично зводиться до визначення збурень насиченості («стрибку» насиченості) із системи (7) з ГУ (8), (9).

Одначе виникнення фрактально-неоднорідної структури процесу реології свідчить про значні збурення фронту поділу компонент багатофазної системи, що, формалізовано, повинно бути відбито в ГУ, оскільки останні визначають геометрію фронту поділу. У відповідності до однієї з властивостей, яка складає основу визначення фрактальних систем, фрактальна структура являє собою систему з *дробовою розмірністю* (що іменується в літературі, наприклад [1, 3, 10, 11], *фрактальною розмірністю*), що геометрично поєднує *фрактальні кластери* (або *агрегати*). При цьому фрактальний кластер являє собою сукупність достатньо великого числа елементів, які всередині даної сукупності зберігають свою індивідуальність [3, 10, 11]. З точки зору реології багатокомпонентних систем, під фрактальним кластером будемо розуміти сукупність «пальців» компоненти, яка витискає, на фронті поділу (рис. 1г, 1д).

Якщо виконати апроксимацію фронту поділу в межах одного «пальця» ломаною лінією, то її довжину можна представити в наступному вигляді

$$L = a\left(R/a\right)^{D}, \tag{10}$$

де L — лінійний розмір «пальця» компоненти, яка витискає (по прямій); a — розмір ланки ломаної лінії (усереднений розмір «зерна» пористого простору); R — розмір фрактального кластера (радіус сфери, яка охоплює «палець»); D — фрактальна розмірність, що забезпечує для кластера певну область масштабів, в якій виконується апроксимація виду (10).

Розв’язуючи (10) відносно фрактальної розмірності D, отримаємо

$$D = \left[\ln(L) - \ln(a)\right] / \left[\ln(R) - \ln(a)\right]. \tag{11}$$

Враховуючи реальні (усереднені) геологічні значення параметрів [8, 14], що входять до (10), і, підставляючи їх в (11), можна оцінити величину фрактальної розмірності для пористих середовищ, в яких здійснюється реологія багатокомпонентних (або гетерогенних) систем

$$D = \left[\ln(100) - \ln(0{,}1)\right] / \left[\ln(50) - \ln(0{,}1)\right] =$$

$$= \left[4{,}605 - (-2{,}302)\right] / \left[3{,}912 - (-2{,}302)\right] = 1{,}112.$$

Далі, маючи реологічні фрактальні характеристики багатокомпонентної (або гетерогенної) системи при значних збуреннях фронту поділу компонент, можна сформувати *математичну модель* фрактально-неоднорідної системи.

2. Формалізація задачі реології фрактально-неоднорідної (гетерогенної) системи у вигляді варіаційної нерівності. Сформулюємо ММ процесу реології фрактально-неоднорідної системи, яка характеризується порушенням «гладкості» фронту поділу компонент. Запишемо для плаского випадку ($i=2$) рівняння динаміки (7) відповідно для компоненти, яка витискається ($j=1$), і для компоненти, яка витискає ($j=2$) з урахуванням «стрибка» насиченості в функції Баклея-Леверета та параметра пористості m середовища, в якому реалізується реологічний процес

$$(-1)^j \frac{m\partial S_j}{\partial t}-\frac{k_j\left(S_j\right)}{\mu_j}J\left(S_j\right)\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_i}-\frac{d\tilde{P}_c}{dS_j}-G_j\left(\left|\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]\right\}=\frac{1}{h}Q_j\,, \quad (12)$$

де h — товщина реологічного пласта (в літературі використовується термін «потужність пласта», наприклад, [13, 15, 16]).

Початкові та граничні умови приймуть вигляду

$$S_j\left(0,z\right)\Big|_{z\in\Omega}=S_{j_0}\left(z\right);\ \tilde{P}\left(0,z\right)\Big|_{z\in\Omega}=\tilde{P}_0\left(z\right),\ j=1,2 \quad (13)$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\eta}\right|_{L\in\Gamma}>0\,;\ \left.\frac{\partial S_j}{\partial\eta}\right|_{L\in\Gamma}>0\,;\quad \left.\frac{\partial P_c\left(S_j\right)}{\partial\eta}\right|_{L\in\Gamma}>0\,,\ j=1,2\,. \quad (14)$$

Приведемо ММ процесу реології фрактально-неоднорідної системи до варіаційної форми (тобто, варіаційної нерівності). З цією метою введемо до розгляду пробні функції v_j, за фізичною природою аналогічними функціям насиченості $S_j\left(t,z\right)$, $j=1,2$ і визначених на множині $K:\forall v\in K,\, K=\left\{v\,\middle|\,v\geq 0\ \text{майже скрізь в}\ \Omega\right\}$. Скалярно помножимо рівняння системи (12) відповідно на $\left(v-S_1\right)$ та $\left(v-S_2\right)$. Далі, застосувавши, до перетворених таким чином рівнянь (12) функцію Гріна, отримаємо

$$\left[(-1)^j \frac{m\partial S_j}{\partial t},\left(v-S_j\right)\right]-\int_{\Omega}\frac{k_j\left(S_j\right)}{\mu_j}J\left(S_j\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_i}\left[\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_i}-\frac{d\tilde{P}_c}{dS_j}\frac{\partial S_j}{\partial z_i}-G_j\left(\left|\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]\frac{\partial\left(v-S_j\right)}{\partial z_i}\right\}dz_i= \quad (15)$$

$$=\frac{1}{h}Q_j,\left(v-S_j\right)++\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial S_j}{\partial\eta},\left(v-S_j\right)\right]d\Gamma,\ \forall\, v,S_j\in K,\ j=1,2.$$

Визначимо білінійну форму

$$a\left[\tilde{P},\left(v-S_j\right)\right]=\int_{\Omega}\left[\frac{k_j\left(S_j\right)}{\mu_j}J\left(S_j\right)\sum_{i=1}^{2}\frac{d\tilde{P}_c}{dS_j}\frac{\partial S_j}{\partial z_i}\frac{\partial\left(v-S_j\right)}{\partial z_i}\right]dz \quad (16)$$

і функціонали

$$j(v)=\int_{\Omega}\left[\frac{k_j\left(v_j\right)}{\mu_j}J\left(v_j\right)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial z_i^2}-G_j\left(\left|\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]dz\ , \qquad (17)$$

$$j(S)=\int_{\Omega}\left[\frac{k_j\left(S_j\right)}{\mu_j}J\left(S_j\right)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial z_i^2}-G_j\left(\left|\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]dz\ . \qquad (18)$$

Тоді, в результаті очевидних перетворень, приходимо до наступної системи варіаційних нерівностей у частинних похідних

$$\begin{gathered}S_j\in K:\left[\left(-1\right)^j\frac{m\,\partial S_j}{\partial t},\left(v-S_j\right)\right]-\\-a\left[\tilde{P},\left(v-S_j\right)\right]-\mathrm{j}\left(v_j\right)+\mathrm{j}\left(S_j\right)\geq\left[\frac{1}{h}Q_j,\left(v-S_j\right)\right],\ \forall v_j\in K.\end{gathered} \qquad (19)$$

Отримана система варіаційних нерівностей вигляду (19) доповнюється початковими (13) та граничними (14) умовами.

Висновки. Виконано якісний опис процесу реології багатокомпонентної (гетерогенної) системи у пористому середовищі, а також формалізація задачі реології фрактально-неоднорідної системи у вигляді варіаційної нерівності у частинних похідних, що дозволило отримати адекватну математичну модель процесу, що досліджується. Модель отримано на підставі гіпотези про фрактально-неоднорідну структуру реологічного процесу, для якого визначено числові значення основних характеристик, зокрема, фрактальної розмірності. Остання дозволяє оцінити ступінь «негладкості» границі поділу складових багатокомпонентної (або гетерогенної) системи в реологічному процесі.

Список використаних джерел:

1. Мандельбот Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельбот. — М. ; Ижевск : МКИ, 2002. — 656 с.
2. Гийон Э. Фракталы и перколяция в пористой среде / Э. Гийон, К. Д. Минтеску, Ж. П. Юлен, С. Ру // Успехи физических наук. — 1991. — Т. 161, № 10. — С. 121–128.
3. Зосимов В. В. Динамическая фрактальная структура эмульсий, обусловленная движением и взаимодействием частиц. Численная модель / В. В. Зосимов, Д. Н. Тарасов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1997. — Т. 111. — Вып. 4. — С. 1314–1319.
4. Katz A. J. Fractal Sandstone Pores: Implications between for Conductivity and Pore Formation / A. J. Katz, A. H. Thompson // Physical Review Letters. — 1985. — Vol. 54. — P. 1325–1332.

5. Avnir D. Chemistry in non integer dimensions between two and three. Fractal surfaces of absorbents / D. Avnir, D. Farin, P. Pfeifer // The Journal of Chemical Physics. — 1983. — Vol. 79, № 7. — P. 3566–3571.
6. Неймарк А. В. Термодинамический метод расчета поверхностной фрактальной размерности / А. В. Неймарк // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1990. — Т. 51. — Вып. 10. — С. 535–538.
7. Черкашинин Г. Ю. Оценка фрактальной размерности дисперсных систем на основании уравнения, описывающего адсорбцию в микропорах / Г. Ю. Черкашинин, В. А. Дроздов // Журнал физической химии. — 1998. — Т. 72, № 1. — С. 88–92.
8. Сулейманов Б. А. Особенности фильтрации гетерогенных систем. — М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2006. — 354 с.
9. Chang J. Pressure-Transient Analysis of Fractal Reservoir / J. Chang, Y. C. Yortsos // SPE Formation Evaluation. — 1990, March. — SPE 18170. — P. 31–38.
10. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. — М. : Мир, 1991. — 254 с.
11. Смирнов Б. М. Физика фрактальных кластеров / Б. М. Смирнов. — М. : Наука, 1991. — 133 с.
12. Moulu J. C. A new model for three-phase relative permeability's based on a fractal representation of the porous media / J. C. Moulu, O. Vizika, F. Kalandjian // SPE Formation Evaluation. — 1997, August. — SPE 38891. — P. 147–158.
13. Верлань А. Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов / А. Ф. Верлань, С. А. Положаенко, Н. Г. Сербов. — К. : Наука, 2011. — 416 с.
14. Бернадинер М. Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М. Г. Бернадинер, В. М. Ентов. — М. : Наука, 1975. — 199 с.
15. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. — М. : Недра, 1982. — 406 с.
16. Кричлоу Генри Б. Современная разработка нефтяных месторождений / Б. Кричлоу Генри. — М. : Недра, 1979. — 302 с.

The conditions of «smoothness» of heterogeneous components Front separation (heterogeneous) systems by analyzing the «jump» feature in saturation Bakley-Leverett. It is shown that «jump» saturation absent, and the division front was moving and keeps the «smoothness» when the movable components that squeezes does not exceed movable components that squeezed. Also show that violations of the «smoothness» Front separation leads to inhomogeneous fractal structure process rheology. A numerical values fractal dimension of the front division for rheological process that occurs in real geological conditions. The mathematical model of fractal-heterogeneous systems in a class of varitional inequalities.

Keywords: *heterogeneous system, process rheology, fractal structure, fractal cluster, mathematical model, varitional inequalities.*

Отримано: 28.09.2016