

УДК 004.94.556

DOI: 10.32626/2308-5916.2026-29.14-27

Бомба А. Я.

ORCID: 0000-0001-5528-4192,

д-р техн. наук, професор, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна,
E-mail: a.ya.bomba@nuwm.edu.ua

Кушнір О. О.

ORCID: 0009-0003-3928-8048,

аспірант, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна,
E-mail: ol.o.kushnir@nuwm.edu.ua

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВІЛЬНОГО РУХУ ВОДИ У ВОДОЙМІ З ДІЛЯНКАМИ ПОПОВНЕННЯ ТЕЧІЇ МЕТОДОМ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

Дослідження присвячено узагальненню чисельного методу комплексного аналізу моделювання процесів повільного руху води в водоймах, обмежених лініями витоку, витоку та береговими непроникуваними лініями. А саме, розглядається плоска задача повільного руху води у водоймі з довільною скінченною кількістю ділянок поповнення течії та однією ділянкою витоку, при умові «відсутності перетоків» (між ділянками поповнення). Для розв'язку даної задачі, запропоновано узагальнення відомого чисельного методу комплексного аналізу, що базується на побудові конформного відображення даної фізичної області течії на область відповідного комплексного потенціалу, яка має вигляд многокутника зі сторонами паралельними осям координат. Для цього введено комплексний потенціал течії, що складатиметься з потенціалу швидкостей та функції течії, і сформульовано відповідну обернену задачу (на конформне відображення області комплексного потенціалу на фізичну область) з невідомими геометричними та гідродинамічними параметрами, зокрема витратами кожного джерела поповнення та загальною витратою через ділянку витоку. Відповідну різницеву схему побудовано на основі апроксимації рівнянь Лапласа та умов Коші–Рімана з використанням шаблонів типу «хрест» і «Т», а також узагальнено ітераційний алгоритм уточнення координат вузлів гідродинамічної сітки, параметрів

Стаття надійшла до редакції: 12.02.2026

Рекомендовано до друку: 17.03.2026

Оприлюднено (online): 15.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

конформності та витрат. Цей алгоритм реалізовано програмно мовою Python і апробовано на тестовій задачі для кругової області з двома джерелами поповнення та одним джерелом витоку. Проведено ряд чисельних експериментів для випадків однакових і різних значень потенціалу на ділянках поповнення. Побудовано гідродинамічні сітки та виявлено характерні підобласті згущення сітки та застійні зони.

Ключові слова: *математичне моделювання, конформні відображення, гідродинамічна сітка руху, чисельні методи, метод комплексного аналізу.*

Вступ. З використанням фізичних законів, теорії векторних полів та методів комплексного аналізу, в роботах [4-8, 11, 12] розглядалися математичні моделі повільного руху води в областях, обмежених ділянками поповнення (джерелами), витоку та береговими непроникними лініями. Ці моделі будувались для задач із одним, або кількома джерелами, та визначали, як інтенсивність, або потенціал цих джерел впливає на рух води в цих областях.

Зокрема, в роботі [11] описано деякі із характерних випадків формування ідеальної течії в залежності від заданих значень керуючого потенціалу. На основі модифікації методу сумарних зображень Г. Положого отримано характеристичну функцію течії, наводяться приклади побудови динамічної сітки, поля швидкості, приклади формування різних перетоків. При цьому виділені типи задач (ключових) для знаходження таких значень керуючого потенціалу, які оптимізують конкретні функціонали, наводиться приклад розв'язку однієї із них.

А в [12] методологію моделювання процесів повільного руху рідин у водоймах, що ґрунтується на інтерпретації реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним (типу фільтраційного) полем з наступним застосуванням наближених методів квазіконформних відображень, узагальнено на випадки збільшення кількості джерел збурення вихідної течії. Якщо природна течія не є близькою до ідеальної, то у низці випадків одержані розв'язки можуть використовуватися в якості нульового наближення шуканого поля (комплексного квазіпотенціалу, швидкості тощо). Запропонований підхід дає можливість відшукування ліній розділу основного та додаткового потоків, враховує фізичні аспекти процесу руху водяних мас, зокрема описаний вище фіктивний коефіцієнт провідності забезпечує близькість величини швидкості до нуля поблизу берегових ліній. При цьому забезпечується можливість задання окремих ділянок берегових ліній масивами точок (з подальшою інтерполяцією межі області деякими сплайнами, що є актуальним для реальних об'єктів із сильною хвилястістю їх меж). Особливістю розробленого алгоритму є можливість зупинки процедури обчислень при виконанні лише деяких із умов закінчення процесу з автоматичним визна-

ченням тих ділянок фізичної області фільтрації, де мають місце похибки більші заданої точності наближень відносно інших умов, що дає змогу економніше використовувати машинний час. Це є актуальним, зокрема, у зв'язку із виявленням так званих «застійних зон» та «зон великих градієнтів», що виникають поблизу особливих точок негладких берегових ліній. Також у алгоритмі передбачено можливість зміни місця положення ділянки збурення потоку.

Ми продовжуємо ці дослідження, розглядаючи довільну кількість джерел поповнення та одне джерело витoku, при умові, що «відсутні» перетоки з одного джерела поповнення в інше. Аналогічно до попередніх робіт, будуватимемо гідродинамічну сітку, і знаходитимемо потенціал, характеристичну функцію течії в будь-якій точці області, лінії розділу та витрати з кожного джерела, а також загальну витрату із джерела витoku із даної області.

Загальна постановка та математична модель задачі. Розглянемо двовимірну область (деяку водойму), обмежену N ділянками поповнення, однією ділянкою витoku, а також береговими непроникними лініями. Вважаємо, що вода рухається повільно, зокрема відсутні завихрення і інші джерела поповнення/витoku, не враховуємо випаровування, фільтрацію, вітер, хвилі тощо.

Цю область будемо розглядати, як ідеальне векторне поле швидкості $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ руху води, тобто $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ ($\text{rot } \vec{v} = 0$); мається на увазі, що гідравлічна проникність дорівнює 1, $\text{div } \vec{v} = 0$, де φ – потенціал даного поля.

Дана фізична область (позначимо її через G_z) розміщена на деякій комплексній площині (z), де $z = x + iy$ (див. рис. 1).

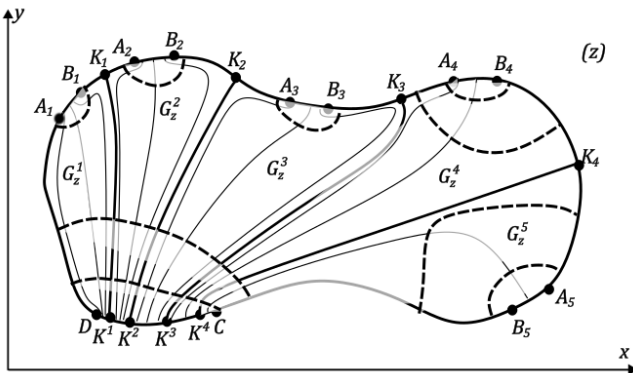


Рис. 1. Фізична область G_z для $N = 5$

На межі області позначимо точками A_k, B_k ($k=1, \dots, N$) – крайні точки ділянок поповнення, C, D – крайні точки ділянки витоку, K_k ($k=1, \dots, N-1$) – початкові точки ліній розділу течії між k -м, та $k+1$ -м джерелом поповнення на ділянці A_1B_N , а K^k ($k=1, \dots, N-1$) – відповідні їм кінцеві точки ліній розділу течії на ділянці витоку CD . Позначимо через G_k ($k=1, \dots, N$) – підобласті G_z , обмежені відповідними ділянками межі області та лініями розділу, в яких тече вода з k -го джерела поповнення; φ_{*k} ($k=1, \dots, N$) – потенціал кожного із джерел поповнення; φ^* – потенціал джерела витоку ($\varphi^* > \varphi_{*k}$, $k=1, \dots, N$). Вважаємо, що на кожній ділянці витоку/витоку вони є константами. Витрати (потоки) з кожного k -го джерела невідомі. Позначимо їх через $Q_k - Q_{k-1} = \int_{A_k B_k} -v_y dx + v_x dy$ ($Q_0 = 0$), а через $Q = Q_N = \int_{CD} -v_y dx + v_x dy$ – потік через ділянку витоку CD , який буде дорівнювати сумі потоків через кожну з ділянок поповнення. На рис. 1 тонкими лініями схематично зображено лінії течії, товстими лініями – лінії розділу, штриховими лініями – лінії рівних потенціалів. Рівняння межі області G_z задаємо у вигляді $g(x, y) = 0$, де $g(x, y)$ – деяка неперервно диференційована функція.

З точки зору математичної фізики, в простішому випадку, задача на знаходження лише потенціалу може бути записана наступним чином:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0; \varphi(x, y)|_{A_k B_k} = \varphi_{*k} \quad (k=1, \dots, N), \varphi(x, y)|_{CD} = \varphi^*, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{B_k A_{k+1}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{DA_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{B_N C} = 0, \quad (k=1, \dots, N-1), \end{cases} \quad (1)$$

де n – нормаль до відповідної кривої.

Але знання лише потенціалу у водоймі не відображає належним чином картину руху води. Додатково важливо знати швидкість її руху, місцезнаходження ліній розділу, значення перетоків з кожного джерела тощо. Тому, аналогічно до [5], введемо функцію течії $\psi(x, y)$, комплексно спряжену з $\varphi(x, y)$, і задачу математичної фізики замінимо більш «широкою» задачею на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області G_z на відповідну область комплексного потенціалу (див. напр. [1-3])

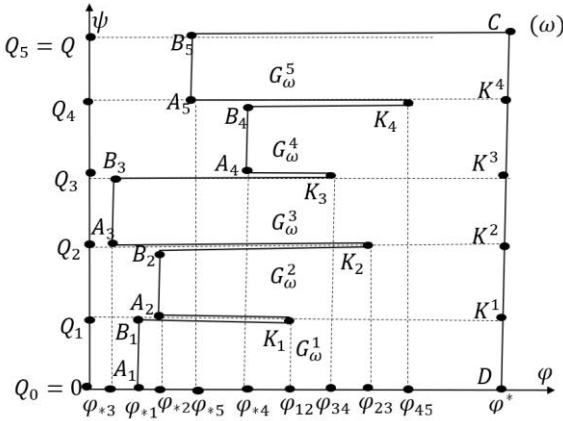


Рис. 2. Область комплексного потенціалу G_ω для $N = 5$

$$G_\omega = \bigcup_{k=1}^N G_\omega^k \bigcup_{k=1}^{N-1} \overline{K_k K^k},$$

де $G_\omega^k = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_{*k} < \varphi < \varphi^*, Q_{k-1} < \psi < Q_k\}$ (рис. 2), що має форму багатокутника зі сторонами, паралельними до осей φ та ψ , $\overline{K_k K^k}$ – відрізки, що сполучають точки K_k та K^k .

При цьому, вимагається, щоб при даному відображенні точки A_k , B_k , C , D , K_k та K^k області G_z перейшли у відповідні їм точки області G_ω . Побудувавши таке конформне відображення, ми знайдемо потенціал, функцію течії, а також місцезнаходження ліній її розділу. Математична модель даної задачі виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \varphi(x, y)|_{A_k B_k} = \varphi_{*k}, \varphi(x, y)|_{CD} = \varphi^*, \\ \psi(x, y)|_{B_k A_{k+1}} = Q_k, \psi(x, y)|_{DA_1} = 0, \psi(x, y)|_{B_N C} = Q(k = 1, \dots, N-1), \end{cases} \quad (2)$$

де Q_k – невідомі, і шукаються в процесі розв'язку задачі.

Як показано в [5], на практиці розв'язують обернену задачу на конформні відображення. Будемо шукати функцію $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$, яка відображає область G_ω на G_z так, щоб точки A_k , B_k , C , D , K_k та K^k області G_ω перейшли у відповідні їм точки області G_z . Математична модель даної задачі має наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial x}{\partial \psi}; \\ g(x(\varphi_k, \psi_k), y(\varphi_k, \psi_k)) = 0, Q_{k-1} \leq \psi_k \leq Q_k \quad (k = 1, \dots, N); \\ g(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, 0 \leq \psi \leq Q; \\ g(x(\varphi, Q_k), y(\varphi, Q_k)) = 0, \min(\varphi_{*k-1}, \varphi_{*k}) \leq \varphi \leq \max(\varphi_{*k-1}, \varphi_{*k}), \varphi_{*0} = \varphi^*, \end{array} \right. \quad (3)$$

де Q_k – невідомі, і шукаються в процесі розв’язку задачі.

Різницьва схема та обчислювальний алгоритм задачі. Дану задачу розв’язуватимемо чисельним ітераційним сітковим методом. Для побудови різницьвої схеми задачі, розіб’ємо кожну з підобластей комплексного потенціалу G_{ω}^k на прямокутники. Для простоти будемо вважати, що довжини всіх горизонтальних ребер многокутника, що обмежує область комплексного потенціалу є «сильно раціональними», тобто їх можна розбити на відносно невелику кількість рівних відрізків по горизонталі. Це потрібно для того, щоб координати граничних вузлів на межі стикування сусідніх підобластей співпадали. По вертикалі цю умову ставити не будемо. Позначимо n_k – кількість відрізків по осі φ , m_k – кількість відрізків по осі ψ , на кожній із ділянок G_{ω}^k ($k = 1, \dots, N$), а $\Delta\varphi$, $\Delta\psi_k$ – довжини відповідних відрізків (див. рис. 3). Додатково позначимо $n_{k,0}$ – кількість відрізків між точками A_k та K_{k-1} , а $n_{k,1}$ – між B_k та K_k . При даних позначеннях матимуть місце наступні рівності: $\varphi^* - \varphi_{*k} = n_k \Delta\varphi$, $Q_k - Q_{k-1} = m_k \Delta\psi_k$ ($k = 1, \dots, N$).

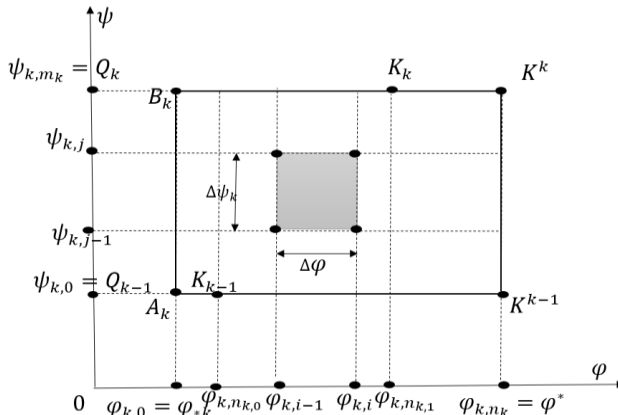


Рис. 3. Розбиття підобласті комплексного потенціалу G_{ω}^k , для випадків ($k = 2, \dots, N-1$)

Аналогічно до [4, 5], для спрощення побудови різницевої схеми, в задачі (3) умови Коші-Рімана всередині області замінимо на рівняння Лапласа. Відповідно, різницева схема для внутрішніх вузлів (використовуючи шаблон «хрест») виглядає так:

$$\begin{cases} x_{k,i,j} = \frac{x_{k,i+1,j} + x_{k,i-1,j} + \gamma_k (x_{k,i,j+1} + x_{k,i,j-1})}{2(1 + \gamma_k)}, \\ y_{k,i,j} = \frac{y_{k,i+1,j} + y_{k,i-1,j} + \gamma_k (y_{k,i,j+1} + y_{k,i,j-1})}{2(1 + \gamma_k)}, \end{cases} \quad (4)$$

де $\gamma_k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_k}$ – відповідний конформний інваріант.

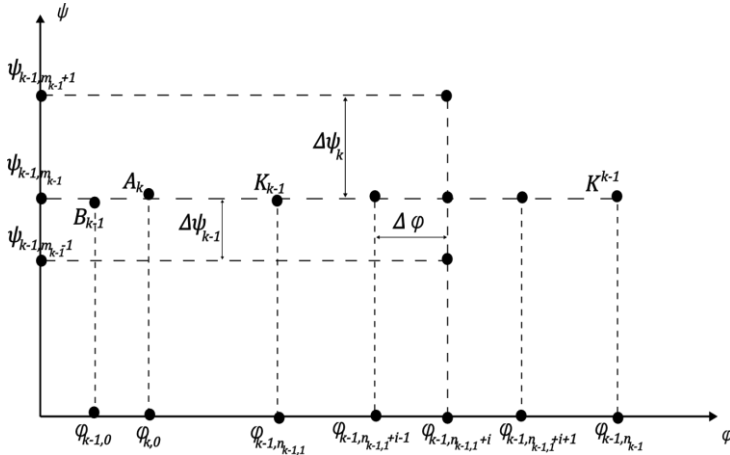


Рис. 4. Вузли на стику підобластей G_{ω}^{k-1} та G_{ω}^k

Вузли на відрізках між точками K_{k-1} та K^{k-1} , а також K_k та K^k є внутрішніми, але для визначення їхніх координат потрібно використовувати один із вузлів сусідньої підобласті, а в ній інше значення $\Delta\psi$, а отже і γ (див. рис. 4). Тут формули для шаблону «хрест» матимуть дещо інший вигляд:

$$\begin{aligned} x_{k,n_k+i,0} &= \frac{(\Delta\psi_{k-1} + \Delta\psi_k)(x_{k,n_k+i+1,0} + x_{k,n_k+i-1,0})}{2(1 + \gamma_k \gamma_{k-1})(\Delta\psi_{k-1} + \Delta\psi_k)} + \\ &+ \frac{\gamma_k \gamma_{k-1} (\Delta\psi_{k-1} x_{k,n_k+i,1} + \Delta\psi_k x_{k,n_k+i,m_{k-1}-1})}{(1 + \gamma_k \gamma_{k-1})(\Delta\psi_{k-1} + \Delta\psi_k)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$y_{k,n_k+i,0} = \frac{(\Delta\psi_{k-1} + \Delta\psi_k)(y_{k,n_k+i+1,0} + y_{k,n_k+i-1,0})}{2(1 + \gamma_k \gamma_{k-1})(\Delta\psi_{k-1} + \Delta\psi_k)} + \frac{\gamma_k \gamma_{k-1}(\Delta\psi_{k-1} y_{k,n_k+i,1} + \Delta\psi_k y_{k,n_k+i,m_{k-1}})}{(1 + \gamma_k \gamma_{k-1})(\Delta\psi_{k-1} + \Delta\psi_k)}. \quad (6)$$

Для граничних вузлів будемо використовувати умови приналежності їх до границі області та умови ортогональності (приграничних векторів до дотичних), через шаблон «Г» (див., напр., [5, 11, 12]). Запишемо їх окремо для кожної з ділянок границі та точок розділу. А саме, для ділянки $A_k B_k$ матимемо:

$$\begin{cases} g(x_{k,0,j}, y_{k,0,j}) = 0, \\ (x_{k,0,j+1} - x_{k,0,j-1})(x_{k,1,j} - x_{k,0,j}) + \\ + (y_{k,0,j+1} - y_{k,0,j-1})(y_{k,1,j} - y_{k,0,j}) = 0, \\ k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, m_k - 1; \end{cases} \quad (7)$$

аналогічно для $B_k K_k$, $B_N C$:

$$\begin{cases} g(x_{k,i,m_k}, y_{k,i,m_k}) = 0, \\ (x_{k,i,m_k} - x_{k,i,m_k-1})(x_{k,i+1,m_k} - x_{k,i-1,m_k}) + \\ + (y_{k,i,m_k} - y_{k,i,m_k-1})(y_{k,i+1,m_k} - y_{k,i-1,m_k}) = 0, \\ k = 1, \dots, N, i = 1, \dots, n_{k,1} - 1 (n_{N,1} = n_N); \end{cases} \quad (8)$$

для $A_k K_{k-1}$, $A_1 D$:

$$\begin{cases} g(x_{k,i,0}, y_{k,i,0}) = 0, \\ (x_{k,i,1} - x_{k,i,0})(x_{k,i+1,0} - x_{k,i-1,0}) + \\ + (y_{k,i,1} - y_{k,i,0})(y_{k,i+1,0} - y_{k,i-1,0}) = 0, \\ k = 1, \dots, N, i = 1, \dots, n_{k,0} - 1 (n_{1,0} = n_1); \end{cases} \quad (9)$$

для $K^{k-1} K^k$, DK^1 , $K^{N-1} C$:

$$\begin{cases} g(x_{k,n_k,j}, y_{k,n_k,j}) = 0, \\ (x_{k,n_k,j+1} - x_{k,n_k,j-1})(x_{k,n_k,j} - x_{k,n_k,j-1}) + \\ + (y_{k,n_k,j+1} - y_{k,n_k,j-1})(y_{k,n_k,j} - y_{k,n_k,j-1}) = 0, \\ k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, m_k - 1; \end{cases} \quad (10)$$

для точки розділу K_k :

$$\begin{cases} g(x_{k,n_{k,1},m_k}, y_{k,n_{k,1},m_k}) = 0, \\ (x_{k,n_{k,1}+1,m_k} - x_{k,n_{k,1},m_k})(x_{k+1,n_{k,0}-1,0} - x_{k,n_{k,1}-1,m_k}) + \\ + (y_{k,n_{k,1}+1,m_k} - y_{k,n_{k,1}-1,m_k})(y_{k+1,n_{k,0}-1,0} - y_{k,n_{k,1}-1,m_k}) = 0, \\ k = 1, \dots, N-1; \end{cases} \quad (11)$$

для K^k :

$$\begin{cases} g(x_{k,n_k,m_k}, y_{k,n_k,m_k}) = 0, \\ (x_{k,n_k,m_k} - x_{k,n_k-1,m_k})(x_{k+1,n_{k+1},1} - x_{k,n_k,m_k-1}) + \\ + (y_{k,n_k,m_k} - y_{k,n_k-1,m_k})(y_{k+1,n_{k+1},1} - y_{k,n_k-1,m_k-1}) = 0, \\ k = 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (12)$$

Для обчислення $\Delta\psi_k$, γ_k , Q_k будемо виходити з міркувань конформної подібності елементарних сіткових чотирикутників (з середніми довжинами сторін $a_{k,i,j}$, $b_{k,i,j}$) фізичної області та відповідних їм у області комплексного потенціалу, використовуючи наступні формули:

$$a_{k,i,j} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(x_{k,i,j} - x_{k,i-1,j})^2 + (y_{k,i,j} - y_{k,i-1,j})^2} + \sqrt{(x_{k,i,j-1} - x_{k,i-1,j-1})^2 + (y_{k,i,j-1} - y_{k,i-1,j-1})^2} \right), \quad (13)$$

$$b_{k,i,j} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(x_{k,i,j} - x_{k,i,j-1})^2 + (y_{k,i,j} - y_{k,i,j-1})^2} + \sqrt{(x_{k,i-1,j} - x_{k,i-1,j-1})^2 + (y_{k,i-1,j} - y_{k,i-1,j-1})^2} \right), \quad (14)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{n_k m_k} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{k,i,j}}{b_{k,i,j}}; \quad (15)$$

$$Q_k = Q_{k-1} + \gamma_k (\varphi^* - \varphi_{*k}). \quad (16)$$

Узагальнимо алгоритм, наведений в [5] на випадок довільної кількості джерел, що розглядається в даному дослідженні:

0. Задаємо межу області G_z – функцію $g(x, y)$, координати точок $A_k(x_{A_k}, y_{A_k})$, $B_k(x_{B_k}, y_{B_k})$ ($k=1, \dots, N$), $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$; кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного потенціалу G_ω (параметри n_k , $n_{k,0}$, $n_{k,1}$, m_k); параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_ψ , ε_b , ε_i (їх зміст описано нижче) та нев'язку конформності відображення δ_* .

1. Задаємо початкове наближення шуканих координат вузлів динамічної сітки:

- а) граничних вузлів $x_{k,i,j}^0$ та $y_{k,i,j}^0$ (так щоб виконувалися умови приналежності їх границі області);
- б) внутрішніх вузлів $x_{k,i,j}^0$ та $y_{k,i,j}^0$.
2. Обчислюємо початкові наближення кроків сітки $\Delta\psi_k^0$, параметрів конформності γ_k^0 та витрат Q_k^0 за формулами (13)-(16).
3. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів динамічної сітки $x_{k,i,j}^{s+1}$, $y_{k,i,j}^{s+1}$ за формулами (4)-(6). Перевіряємо максимальне їх зміщення $S_i = \max_{k,i,j} \sqrt{(x_{k,i,j}^{s+1} - x_{k,i,j}^s)^2 + (y_{k,i,j}^{s+1} - y_{k,i,j}^s)^2}$. Якщо воно більше за ε_i , то повторюємо цей крок.
4. «Підправляємо» граничні вузли, використовуючи рівняння (7)-(12). А саме: з другого рівняння (ортогональності вузлів) виражаємо y через x , та підставляємо цей вираз у перше рівняння (межі області). В результаті, отримуємо нелінійне рівняння (відносно координати x), яке розв'язуємо чисельним методом (наприклад Ньютона), і підставивши знайдений розв'язок в «попереднє» рівняння отримаємо координату y .
5. Знаходимо нові наближення $\Delta\psi_k^{s+1}$, γ_k^{s+1} та Q_k^{s+1} за формулами (13)-(16). Якщо зміни невідомих величин $\Delta\psi_k^{s+1}$ більші за ε_ψ , то переходимо до п.3.
6. Знаходимо максимальну величину зміщення вузлів на границі за проведену ітерацію $S_b = \max_{k,i,j} \sqrt{(x_{k,i,j}^{s+1} - x_{k,i,j}^s)^2 + (y_{k,i,j}^{s+1} - y_{k,i,j}^s)^2}$. Якщо вона більша за ε_b , то переходимо до п.3.
7. Обчислюємо параметр конформності отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область, а саме знаходимо максимальну нев'язку δ рівнянь Коші-Рімана, записаних у внутрішніх вузлах сіткової області G_ω за формулою
- $$\delta = \max_{k,i,j} \left(\left| \frac{x_{k,i,j}^{s+1} - x_{k,i-1,j}^{s+1}}{\Delta\varphi} - \frac{y_{k,i,j}^{s+1} - y_{k,i,j-1}^{s+1}}{\Delta\psi_k} \right| + \left| \frac{x_{k,i,j}^{s+1} - x_{k,i,j-1}^{s+1}}{\Delta\psi_k} - \frac{y_{k,i,j}^{s+1} - y_{k,i-1,j}^{s+1}}{\Delta\varphi} \right| \right).$$
- Якщо $\delta > \delta_*$, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сіткової області G_ω (для цього збільшуємо параметри n_k , m_k , не забуваючи при цьому обрати таке співвідношення між ними, щоб сітка G_ω була максимально близька до квадратної) та переходимо до п.3, інакше – кінець роботи алгоритму: задача розв'язана із необхідною точністю.

Чисельні експерименти. Вищезгаданий алгоритм реалізовано в програмі на мові Python. Розрахунки проводились для кругової області, з центром в початку координат, радіусом 1 з $N = 2$ джерелами витоку і одним джерелом витоку, симетрично розподіленими по межі області. Параметри точності $\varepsilon_{\psi} = \varepsilon_b = \varepsilon_i = 10^{-4}$.

Спочатку проводились експерименти для випадку, коли в обох джерелах поповнення задавались однакові потенціали: $\varphi_{*1} = \varphi_{*2} = 0$, $\varphi^* = 1$. Досліджувалась залежність кількості ітерацій S та параметра конформності δ від кількості вузлів сітки $n_{1,1}$, $n_{1,2}$, $n_{2,1}$, $n_{2,2}$, m_1 , m_2 . Результати дослідження наведено в Табл. 1. Відповідну гідродинамічну сітку зображено на рис. 5(а).

Таблиця 1

Результати експериментів при $\varphi_{*1} = \varphi_{*2}$

№	$n_{1,1}$	$n_{1,2}$	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$	m_1	m_2	S	δ	Q
1	15	40	15	40	17	17	502	1,0053	0,5889
2	20	50	20	50	23	23	626	1,0033	0,5927
3	25	65	25	65	30	30	803	1.0017	0.5817
4	30	75	30	75	35	35	958	1.0004	0.5671
5	40	100	40	100	45	45	1196	1.0024	0.5398

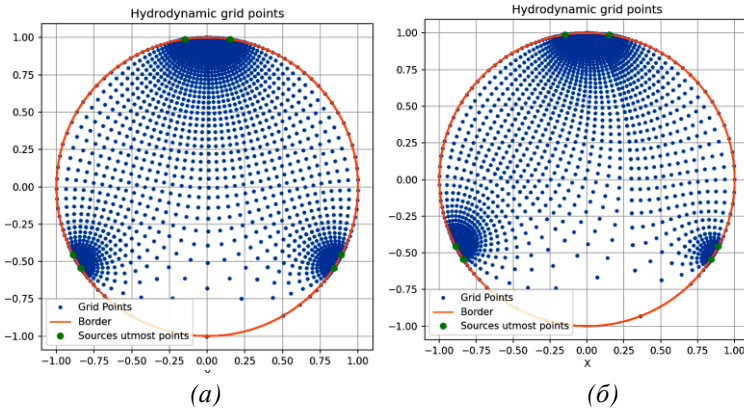


Рис. 5. Гідродинамічна сітка при $\varphi_{*1} = \varphi_{*2}$ (а) та при $\varphi_{*1} = 0.4$ (б)

Як і очікувалось, велике згущення вузлів, а отже і високі швидкості спостерігаються поблизу джерел, а мінімальні швидкості руху спостерігаються біля берега між джерелами. Також підтверджено факт проходження лінії розділу течії вздовж вертикальної лінії симе-

трії даного круга. При цьому, залежність кількості ітерацій від кількості вузлів близька до лінійної.

Друга серія експериментів проводилась для випадку, коли на ділянках поповнення задавались різні потенціали: $\varphi_{*1} > \varphi_{*2} = 0$, $\varphi^* = 1$. Досліджувалась залежність загальної витрати Q (а також середнього значення конформного інваріанта $\bar{\gamma}$, та параметра конформності δ) від потенціалу φ_{*1} . Результати дослідження наведено в Табл. 2., а гідродинамічну сітку для експерименту з потенціалом $\varphi_{*1} = 0.4$ зображено на рис 5(б). При цьому зауважимо, що в останньому експерименті заданої точності ($\varepsilon_{\psi} = \varepsilon_b = \varepsilon_i = 10^{-4}$) досягнути не вдалося (замість цього, умовою завершення роботи алгоритму стало досягнення максимального значення кількості ітерацій $S = 2000$).

Таблиця 2

Результати експериментів при $\varphi_{*1} > \varphi_{*2}$

№	φ_{*1}	$n_{1,1}$	$n_{1,2}$	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$	m_1	m_2	S	$\bar{\gamma}$	δ	Q
1	0.1	15	40	25	40	17	20	632	1.0272	1.0274	0.5489
2	0.2	15	40	25	40	17	20	579	1.0298	1.0502	0.5100
3	0.3	15	40	25	40	17	20	521	0.9820	1.0677	0.4774
4	0.4	15	40	25	40	17	20	2000	1.1118	1.0999	0.4284

Як і очікувалось, при збільшенні потенціалу одного з джерел, загальна витрата зменшується, а також, можна відзначити погіршення показника конформності δ . При спробах подальшого збільшення потенціалу φ_{*1} , збіжності досягнути не вдалось, що може свідчити про порушення умови «відсутності перетоків».

Висновки.

1. На основі методів комплексного аналізу побудовано математичні моделі, різницеву схему та алгоритм розв'язання плоскої задачі повільного руху води у водоймі з довільною скінченною кількістю джерел поповнення течії та одним джерелом витоку, за умови «відсутності перетоків» між джерелами.
2. В перспективі узагальнення запропонованих математичних моделей на випадки врахування перетоків між джерелами поповнення, збільшення кількості джерел витоку, а також врахування впливу підземних джерел, фільтрації, випаровування та опадів тощо.

Список використаних джерел:

1. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. Methods of Complex Variable Theory. Moskva: Nauka, 1973.
2. Gurvits A., Kurant R. The theory of functions. Moskva: Nauka, 1968.

3. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. Problems of hydrodynamics and their mathematical Models. Moskva: Nauka, 1977.
4. Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопечський В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. Київ: Наукова думка, 2007. 308 с.
5. Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошак С. В. Методи комплексного аналізу. Рівне: НУВГП, 2013. 415 с.
6. Бомба А. Я., Сінчук А. М., Ярошак С. В. Моделювання фільтраційних процесів у нафтогазових пластах числовими методами квазіконформних відображень. Рівне: Асоль, 2016. 238 с.
7. Бомба А. Я., Гладка О. М., Кузьменко А. П. Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень. Рівне: Асоль, 2016. 283 с.
8. Бомба А. Я., Бойчур М. В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації. Рівне: НУВГП, 2020. 201 с.
9. Бомба А., Кушнір О. Моделювання гідродинамічних процесів у водоймах з ділянками поповнення течії. *Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference*. Vol. 8. P. 280-281. DOI: <https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.087>.
10. Бомба А., Кушнір О. Модифікація задачі Д. Гільберта при моделюванні процесів повільного руху рідин з перетоками. *Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference*. Vol. 7. P. 282-283. DOI: <https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.086>.
11. Bomba A. Ya., Kashtan S. S., Skopetskiy V. V. Nonlinear Inverse Boundary – Value Problems of Conformal Mapping with a Controlling Potential. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2004. Vol. 40. № 1. P. 58-65. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:CASA.0000028100.70341.57>.
12. Бомба А. Я., Бойчур М. В., Савюк Є. В. Числові методи квазіконформних відображень моделювання повільного руху рідини у водоймах. *Вісник НУВГП*. 2016. № 2 (74). С. 92-106.

References:

1. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. Methods of Complex Variable Theory. Moskva: Nauka, 1973.
2. Gurvits A., Kurant R. The theory of functions. Moskva: Nauka, 1968.
3. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. Problems of hydrodynamics and their mathematical Models. Moskva: Nauka, 1977.
4. Bomba A. Ya., Bulavatskiy V. M., Skopetskiy V. V. Nelineini matematichni modeli protsesiv heohidrodynamiciky. Kyiv: Naukova dumka, 2007. 308 p.
5. Bomba A. Ya., Kashtan S. S., Pryhomytskyi D. O., Yaroshchak S. V. Metody kompleksnoho analizu. Rivne: NUVHP, 2013. 415 p.
6. Bomba A. Ya., Sinchuk A. M., Yaroshchak S. V. Modeliuvannia filtratsiinykh protsesiv u naftohazovykh plastakh chyslovymy metodamy kvazikonformnykh vidobrazhen. Rivne: Asol, 2016. 238 p.
7. Bomba A. Ya., Hladka O. M., Kuzmenko A. P. Obchysliuvalni tekhnolohii na osnovi metodiv kompleksnoho analizu ta sumarnykh zobrazhen. Rivne: Asol, 2016. 283 p.
8. Bomba A. Ya., Boichura M. V. Metody kompleksnoho analizu v zadachakh identyfikatsii. Rivne: NUVHP, 2020. 201 p.

9. Bomba A., Kushnir O. Modeliuvannia hidrodynamichnykh protsesiv u vodoimakh z diliankamy popovnennia techiei. Modeling, *Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference*. Vol. 8. P. 280-281. DOI: <https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.087>.
10. Bomba A., Kushnir O. Modyfikatsiia zadachi D. Hilberta pry modeliuvanni protsesiv povilnoho rukhu ridyn z peretokamy. *Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference*. Vol. 7. P. 282-283. DOI: <https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.086>.
11. Bomba A. Ya., Kashtan S. S., Skopetskii V. V. Nonlinear Inverse Boundary – Value Problems of Conformal Mapping with a Controlling Potential. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2004. Vol. 40. № 1. P. 58-65. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:CASA.0000028100.70341.57>.
12. Bomba A. Ya., Boichura M. V., Saviuk Ye. V. Chyslovi metody kvazikonformnykh vidobrazhen modeliuvannia povilnoho rukhu ridyny u vodoimakh. *Visnyk NUVHP*. 2016. № 2 (74). P. 92-106.

MATHEMATICAL MODELING OF SLOW WATER FLOW IN A RESERVOIR WITH RECHARGE AREAS USING THE METHOD OF COMPLEX ANALYSIS

The study is devoted to the generalization of the numerical method of complex analysis of modeling processes of slow water movement in water bodies, limited by inflow, outflow and coastal impermeable lines. Namely, the planar problem of slow water movement in a water body with an arbitrary finite number of flow replenishment sections and one outflow section is considered, under the condition of «absence of overflows» (between the replenishment sections). To solve this problem, a generalization of the known numerical method of complex analysis is proposed, which is based on the construction of a conformal mapping of a given physical flow region onto the region of the corresponding complex potential, which has the form of a polygon with sides parallel to the coordinate axes. For this purpose, a complex flow potential consisting of the velocity potential and the flow function is introduced, and a corresponding inverse problem is formulated (for the conformal mapping of the complex potential domain onto the physical domain) with unknown geometric and hydrodynamic parameters, in particular the flows of each replenishment source and the total flow through the outflow section. The corresponding difference scheme is constructed based on the approximation of the Laplace equations and the Cauchy–Riemann conditions using «cross» and «T» type templates, and an iterative algorithm for refining the coordinates of the hydrodynamic grid nodes, conformality parameters, and flows is generalized. This algorithm is implemented programmatically in Python and tested on a test problem for a circular domain with two replenishment sources and one outflow source. A number of numerical experiments are carried out for cases of identical and different potential values in the replenishment sections. Hydrodynamic grids and velocity fields were constructed, and characteristic subregions of grid thickening and stagnation zones were identified.

Key words: *mathematical modeling, conformal mappings, hydrodynamic flow grid, numerical methods, method of complex analysis.*