

УДК 004.4:004.92

DOI: 10.32626/2308-5916.2026-29.5-13

Биков В. О.

ORCID: 0009-0008-6080-869X,

аспірант, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна,

E-mail: v.o.bykov@nuwm.edu.ua

Жуковська Н. А.

ORCID: 0000-0001-7839-0684,

канд. техн. наук, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна,

E-mail: n.a.zhukovska@nuwm.edu.ua

АНАЛІЗ МЕТОДІВ MPM/APIC ТА SPH ДЛЯ ІМПЛЕМЕНТАЦІЇ ФІЗИЧНОЇ МОДЕЛІ В ІГРОВИЙ РУШІЙ ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ СИМУЛЯЦІЇ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩ

У даній науковій роботі розглядається проблема побудови ефективної та фізично обґрунтованої моделі для комп'ютерної симуляції напружено-деформованого стану пористих середовищ у середовищах реального часу, зокрема в сучасних ігрових рушіях. Актуальність дослідження зумовлена зростаючими вимогами до рівня реалізму інтерактивних візуалізацій, що використовуються не лише в індустрії відеоігор, але й у віртуальній реальності, тренажерних системах, інженерних симуляторах та наукових дослідженнях. Пористі середовища, такі як ґрунт, пісок, сипучі матеріали або біологічні структури, характеризуються складною механічною поведінкою, яка включає поєднання еластичних, пластичних і в'язкопластичних властивостей, а також значні геометричні деформації, що ускладнює їх адекватне чисельне моделювання.

У роботі досліджено застосування сучасних методів частинок, зокрема Метод Матеріальної Точки (Material Point Method (MPM)), його доповнення частинок в комірках (Affine Particle-In-Cell (APIC)), а також гідродинаміка згладжених частинок (Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)), як альтернативи класичним сітковим методам.

Розглянуто архітектурні особливості інтеграції зазначених методів у ігрові рушії на прикладі Unreal Engine.

Стаття надійшла до редакції: 19.03.2026

Рекомендовано до друку: 09.04.2026

Оприлюднено (online): 15.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

Отримані результати свідчать про доцільність використання гібридних підходів, зокрема APIC, для досягнення балансу між фізичною достовірністю та обчислювальною ефективністю. Запропонований підхід може бути використаний як основа для подальших досліджень у напрямку реалістичної симуляції складних матеріалів у режимі реального часу, а також для розширення функціональних можливостей сучасних інтерактивних систем.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, ігрові рушії, пористі середовища, Unreal Engine, симуляція, метод матеріальної точки, метод частинок в комірках, гідродинаміка згладжених частинок.

Вступ. Моделювання фізичних процесів у комп'ютерній графіці традиційно було компромісом між точністю та швидкістю. У той час як інженерні розрахунки (наприклад, методом скінченних елементів) забезпечують високу точність, вони є ресурсоємними та погано підходять для інтерактивних застосувань. З іншого боку, ігрові рушії тривалий час використовували спрощені моделі, які не відображають реальної фізики матеріалів.

Однак сучасні тенденції розвитку інтерактивних систем, зокрема віртуальної реальності, наукової візуалізації та симуляторів, вимагають більш реалістичного відтворення поведінки матеріалів. Особливо складними є пористі середовища, які демонструють як властивості твердого тіла, так і флюїду.

Класичні підходи мають низку обмежень. Метод скінченних елементів (МСЕ) стикається з проблемами при великих деформаціях, такими як спотворення сітки. Методи на регулярних сітках (МРС) неефективні при змінній геометрії. У цьому контексті методи частинок є перспективним підходом, оскільки вони природно описують матеріал у лагранжевій формі, що дозволяє легко моделювати розриви, перемішування та складні деформації [1].

Математична постановка задачі. Моделювання пористого середовища базується на законах механіки суцільного середовища. В загальному випадку матеріал розглядається як континуум, де кожна точка характеризується набором фізичних величин: густиною, швидкістю, напруженням та деформацією. Положення матеріальної точки визначається відображенням:

$$x = \varphi(X, t), \quad (1)$$

де X – початкові координати, а x – поточні.

Гradient деформації:

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \quad (2)$$

є ключовою величиною, що описує локальну зміну форми та об'єму.

Величина

$$J = \det(f) \quad (3)$$

характеризує зміну об'єму.

Рівняння збереження маси:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot v = 0 \quad (4)$$

відображає той факт, що маса не змінюється у процесі руху матеріалу.

Рівняння балансу імпульсу:

$$\frac{Dv}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho g \quad (5)$$

визначає динаміку системи під дією внутрішніх та зовнішніх сил [2, 3].

Для замикання системи необхідна конститутивна модель, яка пов'язує напруження з деформацією. Наприклад, для гіпереластичного матеріалу типу Неогуківської:

$$\sigma = \mu (FF^T - I) + \lambda \ln J I. \quad (6)$$

Однак для пористих середовищ важливу роль відіграють також пластичні деформації та критерії текучості, що ускладнює модель.

Метод Матеріальної точки. Даний метод є гібридним підходом, який поєднує лагранжівий опис матеріалу (через частинки) та ейлерів опис обчислень (через сітку). Така комбінація дозволяє уникнути проблем, пов'язаних із деформацією сітки, зберігаючи при цьому ефективність чисельних обчислень.

У МРМ матеріал представлений набором матеріальних точок (частинок), кожна з яких несе інформацію про масу, швидкість, напруження та деформацію. Обчислення ж виконуються на допоміжній регулярній сітці, яка використовується лише на час одного кроку інтегрування.

Алгоритм методу складається з трьох основних етапів. На першому етапі (P2G – частинка до комірки (particle-to-grid)) фізичні величини переносяться з частинок на вузли сітки за допомогою вагових функцій:

$$m_i = \sum_P N_i(x_p) m_p. \quad (7)$$

Після цього на сітці обчислюються сили, що виникають унаслідок внутрішніх напружень. Далі виконується інтегрування рівнянь руху, що дозволяє отримати нові швидкості вузлів.

На завершальному етапі (G2P – комірка до частинки (grid-to-particle)) оновлені значення швидкостей інтерполюються назад на частинки. Після цього сітка очищується і не зберігає історії.

Основною перевагою МРМ є його стабільність при великих деформаціях. Проте класична реалізація має недоліки, зокрема чисельну дифузю, яка призводить до втрати енергії [4].

Метод частинок в комірках. Даний метод є похідним із методу матеріальної точки, спрямований на зменшення чисельних втрат енергії. У класичному розумінні методу передача швидкостей між частинками та сіткою здійснюється скалярно, що призводить до втрати інформації про локальні обертання [1, 3, 5].

Метод частинок в комірках вводить афінну апроксимацію поля швидкостей:

$$v(x) = v_p + C_p (x - x_p). \quad (8)$$

В даному рівнянні матриця C_p описує локальний градієнт швидкості. Це дозволяє враховувати не тільки поступальний рух, але й обертання та зсуви.

У результаті метод демонструє значно кращу стабільність, збереження енергії та більш природну поведінку матеріалу. Особливо це важливо для симуляції сипучих середовищ, де локальні структури швидко руйнуються і відновлюються.

Гідродинаміка згладжених частинок. Дана процес є повністю лагранжевим методом, у якому всі фізичні величини обчислюються без використання сітки. Основна ідея полягає у згладжуванні функцій за допомогою ядра:

$$A(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(|r - r_j|, h). \quad (9)$$

Це дозволяє апроксимувати диференціальні оператори, такі як градієнт або дивергенцію.

Метод частинок в комірках добре підходить для моделювання рідин, але при застосуванні до твердих або пористих середовищ виникають труднощі, пов'язані зі стабільністю та шумом. Для їх подолання використовуються додаткові методи стабілізації, наприклад штучна в'язкість (artificial viscosity) або XSPH-корекції [6].

Особливості моделювання пористих середовищ. Під час комп'ютерної симуляції пористих середовищ основна складність полягає в тому, що такі матеріали не демонструють суто пружної або суто рідинної поведінки. Їхня макроскопічна реакція формується одночасно геометрією пористого простору, станом твердого каркаса, історією навантаження та, в окремих випадках, наявністю міжзернових або пористих флюїдів. Саме тому ґрунт, сніг, пісок, подрібнені породи, вологі гранулярні суміші або техногенні пористі матеріали можуть в одному режимі поводитися як майже тверде тіло, а в іншому – переходити до течії, зсуву, ущільнення або локального руйнування. Для комп'ютерної графіки й інтерактивної симуляції це означає, що одна й та сама модель повинна коректно відтворювати як стадію накопичення пружної

енергії, так і стадію пластичного переформування, втрати стійкості чи перебудови структури матеріалу [4, 7].

На відміну від класичних лінійно-пружних тіл, для пористих середовищ визначальною є залежність міцності від тиску. У механічному сенсі це означає, що межа переходу до пластичної течії залежить не лише від інтенсивності дотичних напружень, а й від середнього нормального напруження. Саме тому для ґрунтів, снігу, сипучих матеріалів і широкого класу геоматеріалів у чисельних моделях часто використовують критерії типу Друкера-Прагера, які узгоджуються з тиско-залежною природою руйнування. У найпростішому вигляді умову текучості можна записати як

$$f(\sigma) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \leq 0, \quad (10)$$

де I_1 – перший інваріант тензора напружень, J_2 – другий інваріант девіатора напружень, α – параметр, пов'язаний із кутом внутрішнього тертя, а k – параметр, пов'язаний із когезією. Така постановка добре описує ситуації, коли матеріал під дією стиску ущільнюється, а під дією зсуву втрачає стійкість, що є типовим для більшості пористих середовищ, які розглядаються в ігрових та візуалізаційних задачах [4, 7].

Ще однією важливою особливістю є те, що для таких матеріалів недостатньо відстежувати лише поточну швидкість і координати частинки. Необхідно зберігати історію деформування, оскільки напружений стан залежить від попередніх навантажень, накопиченої пластичної деформації, ступеня ущільнення, а інколи й від деградації структури. У МРМ-подібних постановках це найзручніше робити через градієнт деформації F , який еволюціонує за законом

$$F^{n+1} = (I + \Delta t \nabla v) F^n. \quad (11)$$

Для еластопластичних моделей додатково застосовують мультиплікативне розкладання $F = F_e F_p$, де F_e відповідає пружній частині, а F_p – незворотній пластичній перебудові матеріалу. Такий підхід особливо важливий для снігу, злежаних гранулярних мас і комплексних пористих середовищ, у яких пластичність, ущільнення, тверднення або навпаки розпушення безпосередньо визначають візуальний результат симуляції [4, 3, 6].

У практичній реалізації моделі важливо враховувати не лише сам критерій текучості, а і спосіб пластичного коригування напружень. Зазвичай алгоритм будується за схемою еластичний предиктор/еластичний коректор (elastic predictor/plastic corrector): спочатку виконується пружний прогноз, після чого перевіряється умова текучості, а у випадку її порушення відбувається проєкція напруженого стану назад на поверхню текучості. Для Друкер-Прагер-подібних матеріалів це часто поєднують із

неасоціативним законом течії, який дає змогу контролювати дилатанцію, тобто зміну об'єму під час зсувного деформування. Саме цей момент є принциповим: без коректного опису дилатанції пористе середовище в симуляції або надмірно «розпливатиметься», або, навпаки, поводитиметься неприродно жорстко [2, 4, 7].

Окрему проблему становлять великі деформації та зміна топології. Для снігу, мокрого піску чи руйнованого ґрунту типові процеси налипання, відриву, кришення, локального обвалення, змішування окремих масивів і повторного ущільнення після удару. У традиційних сіткових підходах такі ефекти складно моделювати через виродження сітки та складність повторної перебудови геометрії. Саме тому MPM виявився настільки придатним для цієї категорії задач: частинки забезпечують лагранжеве відстеження матеріальної історії, а фонові ейлери сітка спрощує обчислення градієнтів, самоконтакт, зіткнення та обробку руйнування без необхідності явного ремешингу [1, 7]. APIC, у свою чергу, зменшує чисельну дифузію й краще зберігає локальну структуру швидкісного поля, що особливо помітно в задачах, де матеріал переходить від компактного стану до розсіпання або течії [1, 2, 7].

Для інтерактивної симуляції в ігровому русії повністю фізично вичерпна поромеханічна модель зазвичай є надто дорогою обчислювально. Тому на практиці доцільно використовувати редуковану континуальну постановку, у якій вплив пористості вводиться через стисливість, залежні від густини або ущільнення параметри жорсткості, пластичний поріг, демпфування, коефіцієнти тертя та емпіричні правила тверднення/розм'якшення. Такий компроміс дозволяє зберегти візуально й механічно правдоподібну поведінку матеріалу без переходу до повноцінної багатофазної моделі з окремим розв'язанням рівнянь для твердої та рідкої фаз. Для статті важливо підкреслити, що саме така редуція є виправданою для real-time симуляції: вона не заперечує фізичну основу підходу, а адаптує її до обмежень інтерактивного середовища [3, 6].

Імплементация фізичної моделі в Unreal Engine. Інтеграція фізичної моделі в Unreal Engine потребує врахування архітектурних особливостей русії. Основна складність полягає у необхідності забезпечення високої продуктивності при великій кількості частинок. В даній статті, наразі детальної інформації про імплементацию фізичної моделі в Unreal Engine не буде розписано, і буде описано автором вже в наступній статті. На разі типова архітектура імплементации включає:

- C++ систему симуляції;
- GPU compute shaders;
- буфери StructuredBuffer;
- Niagara для візуалізації.

Обчислення зазвичай переносяться на GPU, що дозволяє обробляти сотні тисяч частинок у реальному часі. Практичні експерименти

показують, що використання методу Частинок в комірках значно покращує якість симуляції пористих середовищ. У порівнянні з класичним методом Матеріальної точки, зменшується втрата енергії та підвищується стабільність.

Методика гідродинаміки згладжених частинок демонструє хороші результати для флюїдів, але потребує додаткових модифікацій для моделювання твердих матеріалів.

Висновки. У статті розглянуто особливості моделювання напружено-деформованого стану пористих середовищ із використанням методів Матеріальної точки, Частинок в комірках та Гідродинаміка згладжених частинок. Показано, що пористі матеріали характеризуються складною механічною поведінкою, яка поєднує великі деформації, пластичні зміни, ущільнення та залежність міцності від тиску. Це зумовлює необхідність застосування чисельних підходів, здатних коректно відтворювати зміну структури матеріалу в процесі навантаження.

У ході дослідження встановлено, що метод MPM є ефективним інструментом для моделювання таких середовищ, оскільки поєднує переваги лагранжевого опису матеріалу та сіткового обчислювального підходу. Використання APIC як удосконалення класичного MPM дозволяє зменшити чисельну дифузію, покращити збереження енергії та підвищити стабільність розрахунків. Метод SPH також може бути застосований у задачах цього класу, однак він є більш доцільним для середовищ із вираженою флюїдоподібною поведінкою.

Отже, найбільш перспективним підходом для симуляції пористих середовищ є використання MPM/APIC у поєднанні з еластопластичними моделями матеріалу. Такий підхід забезпечує достатній рівень фізичної достовірності та може бути адаптований для використання в сучасних інтерактивних системах, зокрема в ігрових рушіях. Перспективи подальших досліджень полягають у підвищенні точності моделей, урахуванні додаткових фізичних чинників та розширенні можливостей симуляції складних багатофазних середовищ.

Список використаних джерел:

1. Sulsky D., Chen Z., Schreyer H. L. A particle method for history-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. New York, 1994. Vol. 118. P. 179-196.
2. Jiang C., Schroeder C., Selle A., Teran J., Stomakhin A. The Affine Particle-In-Cell Method. *ACM Transactions on Graphics*. London, 2015. Vol. 34. № 4. P. 1-10.
3. Monaghan J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*. 2005. Vol. 68. P. 1703-1759.
4. Belytschko T., Liu W. K., Moran B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. *John Wiley & Sons*. 2014. P. 855-864.

5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method. *Butterworth-Heinemann*. 2000. P. 1472-1480.
6. Macklin M., Müller M. Position Based Fluids. *ACM Transactions on Graphics*. 2013. Vol. 32. № 4. P. 132-142.
7. Stomakhin A., Schroeder C., Jiang C., Teran J. A material point method for snow simulation. *ACM Transactions on Graphics*. 2013. P. 1109-1118.
8. Macklin M., Storey K., Lu M., Kier P., Brakensiek J., Kass M., Fleischer K. Warp: A High-Performance Python Framework for GPU Simulation. *ACM SIGGRAPH Courses*. 2022. P. 1-45.
9. Domínguez J. M., Fourtakas G., Altomare C., Canelas R. B., Tafuni A., Garcia-Feal O. DualSPHysics: from fluid dynamics to multiphysics problems. *Computational Particle Mechanics*. 2021. P. 867-895.
10. Guo M., Wang X., Wu K., Gao H. A massively parallel and scalable multi-GPU material point method. *Computer Physics Communications*. 2022. P. 1-15.
11. Kugelstadt T., Elsweiler L., Villegas I., Garcia-Fernandez I., Bender J. Fast Corotated Elastic SPH Solids with Implicit Zero-Energy Mode Control. *Proceedings of the ACM on Computer Graphics and Interactive Techniques*. 2021. P. 1-18.
12. Fang Y., Hu Y., Shi S., Jiang C., Zhu S. QuanTaichi: Discrete Representation for Macroscopic Physical Systems. *ACM Transactions on Graphics*. 2021. P. 1-16.

References:

1. Sulsky D., Chen Z., Schreyer H. L. A particle method for history-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. New York, 1994. Vol. 118. P. 179-196.
2. Jiang C., Schroeder C., Selle A., Teran J., Stomakhin A. The Affine Particle-In-Cell Method. *ACM Transactions on Graphics*. London, 2015. Vol. 34. № 4. P. 1-10.
3. Monaghan J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*. 2005. Vol. 68. P. 1703-1759.
4. Belytschko T., Liu W. K., Moran B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. *John Wiley & Sons*. 2014. P. 855-864.
5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method. *Butterworth-Heinemann*. 2000. P. 1472-1480.
6. Macklin M., Müller M. Position Based Fluids. *ACM Transactions on Graphics*. 2013. Vol. 32. № 4. P. 132-142.
7. Stomakhin A., Schroeder C., Jiang C., Teran J. A material point method for snow simulation. *ACM Transactions on Graphics*. 2013. P. 1109-1118.
8. Macklin M., Storey K., Lu M., Kier P., Brakensiek J., Kass M., Fleischer K. Warp: A High-Performance Python Framework for GPU Simulation. *ACM SIGGRAPH Courses*. 2022. P. 1-45.
9. Domínguez J. M., Fourtakas G., Altomare C., Canelas R. B., Tafuni A., Garcia-Feal O. DualSPHysics: from fluid dynamics to multiphysics problems. *Computational Particle Mechanics*. 2021. P. 867-895.
10. Guo M., Wang X., Wu K., Gao H. A massively parallel and scalable multi-GPU material point method. *Computer Physics Communications*. 2022. P. 1-15.
11. Kugelstadt T., Elsweiler L., Villegas I., Garcia-Fernandez I., Bender J. Fast Corotated Elastic SPH Solids with Implicit Zero-Energy Mode Control. *Proceedings of the ACM on Computer Graphics and Interactive Techniques*. 2021. P. 1-18.

12. Fang Y., Hu Y., Shi S., Jiang C., Zhu S. QuanTaichi: Discrete Representation for Macroscopic Physical Systems. *ACM Transactions on Graphics*. 2021. P. 1-16.

ANALYSIS OF THE MPM/APIC AND SPH METHODS FOR IMPLEMENTING A PHYSICAL MODEL IN A GAME ENGINE FOR COMPUTER COMPUTATIONAL SIMULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF POROUS MEDIA

This scientific paper addresses the problem of developing an efficient and physically grounded model for the computer simulation of the stress-strain state of porous media in real-time environments, particularly in modern game engines. The relevance of the study is driven by the growing demand for realism in interactive visualizations used not only in the video game industry, but also in virtual reality, training systems, engineering simulators, and scientific research. Porous media, such as soil, sand, granular materials, or biological structures, are characterized by complex mechanical behavior that includes a combination of elastic, plastic, and viscoplastic properties, as well as significant geometric deformations, which makes their adequate numerical modeling particularly challenging.

The paper investigates the application of modern particle-based methods, in particular the Material Point Method (MPM), its extension Affine Particle-In-Cell (APIC), as well as Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), as alternatives to classical grid-based methods.

The architectural features of integrating these methods into game engines are considered using Unreal Engine as an example.

The obtained results demonstrate the feasibility of using hybrid approaches, particularly APIC, to achieve a balance between physical accuracy and computational efficiency. The proposed approach may serve as a foundation for further research into the realistic simulation of complex materials in real time, as well as for expanding the functional capabilities of modern interactive systems.

Keywords: *computer modeling, game engines, porous media, Unreal Engine, simulation, Material Point method, Particle-In-Cell method, smoothed particle hydrodynamics.*