

УДК 517.95:519.63

DOI: 10.32626/2308-5916.2026-29.49-61

**Калініченко А. С.**

ORCID: 0009-0002-6793-5516,

Харківський національний університет

радіоелектроніки, м. Харків Україна,

E-mail: anatolii.kalinichenko@nure.ua

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ САМОЗАЙМАННЯ У НАСИПІ З КРУГОВИМ ПЕРЕРІЗОМ МЕТОДАМИ РОТЕ ТА КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА ПОБУДОВИ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ**

Самозаймання насипів таких матеріалів, як вугілля, агропромислової культури, бавовна, торф є наслідком накопичення тепла, виділеного екзотермічною реакцією окиснення, тому насип можна розглядати як тіло з внутрішнім джерелом тепла. Дослідження процесів самозаймання за допомогою математичного моделювання зводиться до необхідності розв'язання початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності. Оскільки знайти аналітичний розв'язок не завжди можливо, то має сенс використовувати методи чисельного аналізу.

Метою цієї статті є чисельне дослідження початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності, що виникає при математичному моделюванні процесів самозаймання насипу сипучого матеріалу циліндричної форми з круговою основою методом Роте у поєднанні з методом квазіфункцій Гріна-Рвачова побудови двобічних наближень.

Для досягнення поставленої мети вихідна початково-крайова задача для напівлінійного рівняння теплопровідності методом Роте була замінена послідовністю крайових задач для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Гельмгольца, кожна з яких була зведена до інтегрального рівняння Урисона. Для нього було побудовано ітераційний процес з двобічним характером збіжності та умовою його зупинки, що базується на апостеріорній оцінці похибки. Апроксимація потужності внутрішнього джерела тепла була проведена за допомогою експоненціальної залежності.

Результати обчислювального експерименту наведено у вигляді графіків наближень до розв'язку на різних часових шарах та

---

*Стаття надійшла до редакції: 21.03.2026*

*Рекомендовано до друку: 18.04.2026*

*Оприлюднено (online): 15.05.2026*

*Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0*

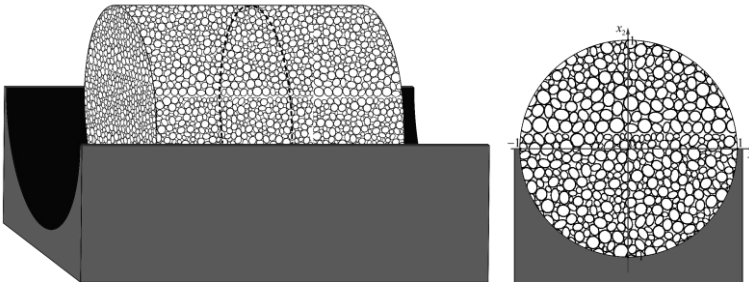
графіків теплокарт, що дозволило дослідити перебіг процесу самозаймання насипу циліндричної форми з круговою основою.

**Ключові слова:** математичне моделювання, двовимірне напівлінійне рівняння теплопровідності, метод двобічних наближень, метод Роте, процеси самозаймання, рівняння Урісона, квазіфункція Гріна-Рвачова, метод  $R$ -функції.

**Вступ.** Проблема контролю та профілактики пожеж при зберіганні та транспортуванні таких сипучих матеріалів, як вугілля, агропромислові культури, бавовна, торф викликана їх схильністю до загоряння без впливу зовнішнього джерела запалювання. Цей процес називається самозайманням та виникає в насипах вказаних матеріалів як наслідок накопичення тепла від екзотермічної реакції окиснення. Його математичне моделювання пов'язане з необхідністю розв'язання початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності, що часто неможливо виконати аналітично. Тому застосування до знаходження її розв'язку методів чисельного аналізу, зокрема, методу Роте у поєднанні з ітераційним методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова є актуальною науковою задачею. У цій роботі розглянуто їх застосування до задачі теплообміну в циліндричному тілі, що має внутрішнє джерело тепла та основою якого є круг

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < R^2\} \cup \cup \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^2$$

радіуса  $R$ . Такий вибір форми тіла впливає з практичних міркувань та відтворює типову форму контейнерів, в яких зазвичай зберігаються та транспортуються сипучі матеріали, тому моделювання розподілу температури в них має практичний сенс для попередження самозаймання. Приклад насипу вугілля такої форми наведено на рис. 1 (зліва зображено насип; пунктиром виділено  $\partial\Omega$ ; справа зображено  $\bar{\Omega}$ ) [1].



**Рис. 1.** Зображення насипу вугілля циліндричної форми та його перерізу, що описується областю  $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

**Постановка задачі.** Розглянемо процес самозаймання у насипі, що має форму циліндричного тіла з круговою основою  $\bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\} \subset \mathbb{R}^2$  (де  $R$  – її радіус), для якого можна стверджувати, що його третій вимір (сторона), перпендикулярний до основи, значно більший за два інші.

Процес самозаймання є наслідком акумуляції достатнього для горіння тепла, яке виділяється як продукт протікаючої всередині насипу екзотермічної реакції окиснення. Накопичення відбувається, якщо внаслідок реакції виділяється більше тепла, ніж може розсіятися у насипові та випромінитися у навколишнє середовище.

Отже, можна вважати, що всередині насипу матеріалу є внутрішнє джерело тепла, тому для моделювання процесів самозаймання у ньому застосовна теорія горіння та вибуху [2, 3]. Тоді математичною моделлю розподілу температури  $T(\mathbf{x}, t)$  при самозайманні у насипі матеріалу, теплофізичні властивості якого є сталими, у припущенні, що розповсюдження тепла всередині насипу відбувається лише через теплопровідність, є початково-крайова задача для рівняння теплопровідності. Для обраної форми насипу, оскільки один його вимір значно більший двох інших, варто розглядати двовимірну модель [4].

Вже виділене хімічною реакцією тепло прискорює її, тому закономірне використання апроксимації потужності внутрішнього джерела тепла з рівняння Арреніуса

$$f(T) = Q \cdot \rho \cdot A_0 \cdot e^{-\frac{E_a}{R(T+273)}}, \quad (1)$$

де  $Q$  – тепло, яке виділяє реакція на одиницю маси,  $\rho$  – щільність матеріалу,  $A_0$  – передекспоненціальний коефіцієнт рівняння Арреніуса,  $E_a$  – енергія активації,  $R$  – універсальна газова стала [5].

У підсумку, математична модель матиме вигляд

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T + Q \cdot \rho \cdot A_0 \cdot e^{-\frac{E_a}{R(T+273)}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = T_\partial(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – просторові координати,  $C$  – питома теплоємність матеріалу,  $k$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $T_0(\mathbf{x})$  – початковий розподіл температури,  $T_\partial(\mathbf{x}, t)$  – межовий розподіл температури.

Початковий та межовий розподіли температур вносять в модель початковий стан насипу та його теплову взаємодію з навколишнім

середовищем відповідно, причому вважаємо їх узгодженими:  
 $T_{\partial}(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$ .

Введемо у розгляд безрозмірну функцію зміни температури

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \frac{E_a}{R(T_0(\mathbf{x}) + 273)} (T(\mathbf{x}, t) - T_0(\mathbf{x})).$$

Нехай на поверхні насипу підтримується стала температура. Тоді,  $T_{\partial}(\mathbf{x}, t) = T_{\partial}^C(\mathbf{x})$ , а оскільки  $T_{\partial}^C(\mathbf{x})$  не залежить від часу і  $T_{\partial}(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$ , то  $T_{\partial}^C(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x})$  на  $\partial\Omega$ , тому

$$\theta_{\partial}(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = \frac{E_a}{R(T_0(\mathbf{x}) + 273)} (T_{\partial}^C(\mathbf{x}) - T_0(\mathbf{x})) = 0$$

та  $\theta_0(\mathbf{x}, t) = 0$ .

Введемо коефіцієнт теплопровідності  $A = \frac{k}{\rho C}$  та позначимо

$B \approx B(\mathbf{x}) = \frac{QA_0}{C} e^{-\frac{E_a}{R(T_0(\mathbf{x}) + 273)}}$  (в припущенні, що  $T_0(\mathbf{x})$  дозволяє таку заміну). Тоді використавши розкладання експоненти в законі Арреніуса [6]

$$f(T) = Q \cdot \rho \cdot A_0 \cdot e^{-\frac{E_a}{R(T+273)}} \approx \rho \cdot B \cdot e^{\theta}$$

та обравши час моделювання  $t_0 > 0$ , можемо виконати перехід до розгляду початково-крайової задачі для функції зміни температури  $\theta(\mathbf{x}, t)$  в перерізі насипу  $\Omega$  для процесу самозаймання на часовому інтервалі  $t \in [0, t_0]$ , детальніше описаний в [7]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A\Delta\theta + Be^{\theta}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, t_0], \quad (4)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, t_0], \quad (5)$$

$$\theta(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (6)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, t_0]. \quad (7)$$

Параметри  $A > 0$  та  $B > 0$  відображають фізико-хімічні властивості насипу матеріалу та визначаються емпірично. Умова (5) має сенс в контексті розгляду функції зміни температури при екзотермічній реакції.

Задача (4)-(7) була досліджена в [1, 7] методом Роте та методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Ця робота продовжує розпочаті дослідження в плані використання у поєднанні з методом Роте методу квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних наближень при дослідженні двовимірних процесів са-

мозаймання, який не є прив'язаним до наявності відомої функції Гріна для області моделювання та, якщо вона відома, але є складною для використання, надає альтернативу.

**Метод розв'язання.** Застосуємо до задачі (4)-(7) метод Рунге в поєднанні з методом квазіфункцій Гріна-Рвачова побудови двобічних наближень.

Розв'язок задачі (4)-(7), відповідно до методу Рунге, шукатимемо вздовж прямих  $t = \text{const}$ . Для цього введемо на часовому відрізку  $[0, t_0]$  з кроком  $\tau$  сітку

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad m\tau = t_0,$$

у вузлах якої апроксимуємо відношенням скінченних різниць диференціальний оператор в лівій частині рівняння (4)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \approx \frac{\theta(\mathbf{x}, t_j) - \theta(\mathbf{x}, t_{j-1})}{\tau},$$

та, позначивши  $\Theta_j = \Theta_j(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}, t_j)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ , з похибкою  $O(\tau)$  замінимо на прямій  $t = t_j$  вихідне рівняння напівплінійним еліптичним рівнянням

$$-\Delta \Theta_j + \frac{1}{A\tau} \Theta_j = \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1} + \frac{B}{A} e^{\Theta_j}. \quad (8)$$

Використовуючи початкову умову (6) отримаємо значення  $\theta(\mathbf{x}, t)$  на часовому шарі  $t_0 = 0$ :  $\Theta_0(\mathbf{x}) = 0$ . Рівняння (8), яким було замінене вихідне (4), також розглядається при  $\mathbf{x} \in \Omega$ , тому, зважаючи на (7), маємо крайову умову  $\Theta_j(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = 0$ .

Отже, знаходження розв'язку вихідної початково-крайової задачі (4)-(7) зведено до розв'язання послідовності крайових задач

$$-\Delta \Theta_j + \frac{1}{A\tau} \Theta_j = \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1} + \frac{B}{A} e^{\Theta_j}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (10)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (11)$$

$$\Theta_0(\mathbf{x}) = 0, \quad (12)$$

до кожної з яких застосуємо метод двобічних наближень з використанням методу квазіфункцій Гріна-Рвачова [8]. Зауважимо, що ці задачі розв'язуються послідовно та при розв'язанні задачі (9)-(11) на  $j$ -му часовому шарі ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) функція  $\Theta_{j-1}$  буде вже знайдена.

Введемо у розгляд  $\omega(\mathbf{x})$  – елементарну функцію, побудовану методом  $R$ -функцій, що описує геометрію області  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$ :

- $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$  ;
- $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$  ;
- $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .

Наприклад, для кругової області  $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$  можна обрати

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2R} (R^2 - x_1^2 - x_2^2).$$

Тоді квазіфункція Гріна-Рвачова для оператора Гельмгольца  $-\Delta u + \frac{1}{A\tau}u$  ( $A > 0$ ) з лівої частини рівняння (9) матиме вигляд

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \left( K_0 \left( \frac{1}{\sqrt{A\tau}} r \right) - K_0 \left( \frac{1}{\sqrt{A\tau}} \sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})} \right) \right),$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ ,  $K_0(z)$  – модифікована функція Бесселя другого роду,  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2}$ .

Записуємо еквівалентне задачі (9)-(12) інтегральне рівняння Урисона

$$\Theta_j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_j(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left( \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) + \frac{B}{A} e^{\Theta_j(\mathbf{s})} \right) ds, \quad (13)$$

де  $K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \left( -\Delta + \frac{1}{A\tau} \right) K_0 \left( \frac{1}{\sqrt{A\tau}} \sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})} \right)$ . Оператор в правій частині рівняння (13) після введення позначень

$$K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$$

набуває вигляду

$$\begin{aligned} T_j(\Theta)(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_j(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_j(\mathbf{s}) ds + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left( \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) + \frac{B}{A} e^{\Theta_j(\mathbf{s})} \right) ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Зафіксуємо надалі  $j$  та розглянемо на  $j$ -му часовому шарі рівняння (13) у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$  з введеною напівоупорядкованістю за допомогою конуса невід’ємних неперервних функцій  $\mathcal{K}_+ = \{\theta \in C(\bar{\Omega}) : \theta(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$ .

Нелінійний інтегральний оператор (14) є гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}_j(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) ds +$$

$$+ \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left( \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) + \frac{B}{A} e^{v(\mathbf{s})} \right) d\mathbf{s}.$$

Сильно інваріантний конусний відрізок для оператора  $T_j$ , що діє за правилом (14), можна шукати, наприклад, у вигляді  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle = \langle 0, \beta_j \rangle$ , де число  $\beta_j > 0$  визначається з нерівностей

$$-\beta_j \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} + \frac{B}{A} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq 0 \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$$

$$\beta_j \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} + \frac{1}{A\tau} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \frac{B}{A} e^{\beta_j} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta_j$$

для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ .

Отже, можемо побудувати двобічний ітераційний процес для знаходження розв'язку крайової задачі (9)-(11) на  $j$ -му часовому шарі:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$

$$+ \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left( \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) + \frac{B}{A} e^{v^{(k)}(\mathbf{s})} \right) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$

$$+ \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left( \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) + \frac{B}{A} e^{w^{(k)}(\mathbf{s})} \right) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_j,$$

з умовою завершення його проведення

$$\frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left( w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}) \right) < \varepsilon,$$

що впливає із апостеріорної оцінки похибки. При цьому наближенням до розв'язку рівняння Урисона (13) (а отже, і крайової задачі (9)-(11)) на  $k$ -й ітерації вважатимемо функцію

$$\Theta_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x}) \right).$$

Застосовуючи до послідовності крайових задач (9)-(11) метод двобічних наближень та доповнюючи значенням з (12), отримуємо набір функцій

$$\Theta_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \Theta_1^{(k_1)}(\mathbf{x}), \quad \Theta_2^{(k_2)}(\mathbf{x}), \quad \dots, \quad \Theta_m^{(k_m)}(\mathbf{x}).$$

За отриманим набором функцій за допомогою апарату теорії інтерфлетатії [9] можна побудувати наближений розв'язок  $u_m(\mathbf{x}, t)$  задачі (4)-(7) у вигляді функції, визначеної при всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, t_0]$ .

Він матиме точність  $O(\tau)$ . Провівши повторно ітераційний процес з кроком  $\frac{\tau}{2}$  цей розв'язок можна уточнити відповідно до правила Рунге до порядку  $O(\tau^2)$ .

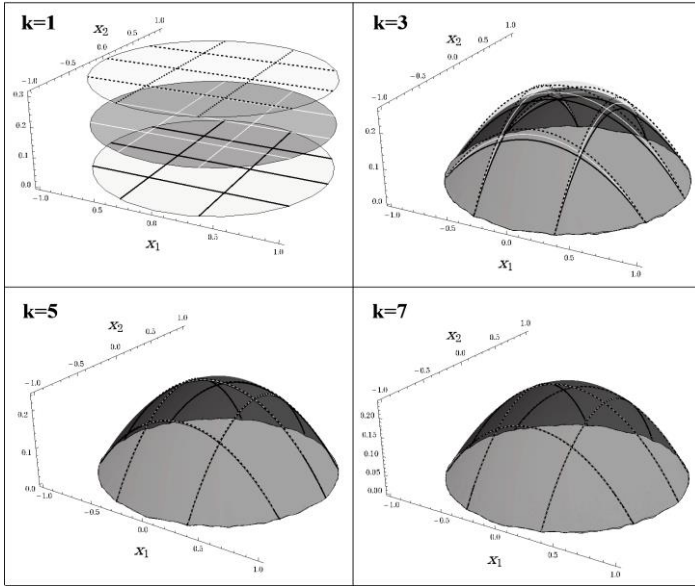
**Обчислювальний експеримент.** Обчислювальний експеримент проведено для початково-крайової задачі для двовимірного напівплінійного рівняння теплопровідності (4)-(7), що моделює процес самозаймання у циліндричному насипі з круговою основою  $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$  при  $R=1$ , обравши час моделювання  $t_0 = 1$ , значення параметрів  $A = 1$ ,  $B = \frac{5}{4}$  та крок сітки на часовому інтервалі  $\tau = \frac{1}{3}$ .

На рис. 2 проілюстровано ітераційний процес на першому часовому шарі  $t = \tau = \frac{1}{3}$  для деяких номерів ітерацій  $k$ , що демонструє його збіжність, яка має двобічний характер: пунктиром зображено верхнє наближення  $w^{(k)}(\mathbf{x})$ , білою суцільною лінією – наближення до розв'язку на  $k$ -й ітерації  $\Theta_1^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x}))$ , чорною суцільною лінією – нижнє наближення  $v^{(k)}(\mathbf{x})$ .

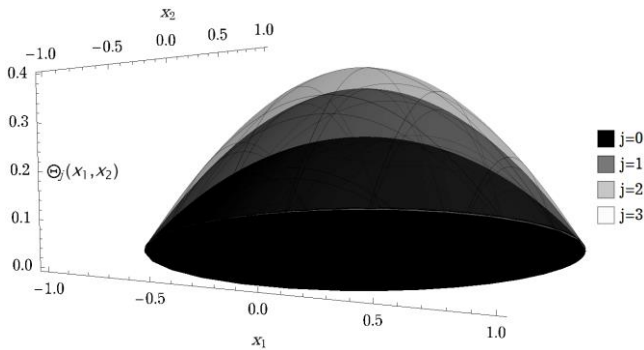
На рис. 3 наведено графіки наближень  $\Theta_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 0, 3$ . На них спостерігається зростання наближення зі збільшенням номеру часового шару, що, повертаючись до фізичного сенсу задачі (4)-(7), можна трактувати як збільшення температури в насипові з часом.

До такого ж висновку можна прийти аналізуючи дані, наведені в табл. 1: максимальне значення кожного наближення, аргумент максимізації, різниця між максимумами наближень на поточному та попередньому часовому шарах, значення інтегралу наближення по області  $\Omega$ , поділене на міру області:  $\bar{\theta}_j = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} \Theta_j(\mathbf{x}) ds$ , що відображає середнє значення наближення, та різниця між цими значеннями на поточному та попередньому часових шарах  $\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_{j-1}$ . Враховуючи фізичний сенс математичної моделі, такі значення як максимум та інтеграл наближення, розділений на міру області, відображають відповідно максимально накопичене в точці перерізу насипу тепло та серед-

не його значення на цьому часовому шарі. Як бачимо, різниця цих значень на поточному та попередньому шарах зменшується зі збільшенням номеру шару, тобто при обраних параметрах з часом зменшується кількість накопиченого тепла за однакові часові проміжки.



**Рис. 2.** Графіки  $w^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $\Theta_1^{(k)}(\mathbf{x})$  та  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  на часовому шарі  $t = \frac{1}{3}$  для круга радіуса  $R = 1$  при  $k = 1, 3, 5, 7$



**Рис. 3.** Графіки наближених розв'язків  $\Theta_j(\mathbf{x})$  до розв'язку задачі (4)-(7)

для круга радіуса  $R = 1$  на часових шарах  $t = \frac{1}{3}j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$

Дані про максимум  $\Theta_j(\mathbf{x})$ ,  $j = \overline{0,3}$ , аргумент максимізації  
 та різницю максимумів  $\Theta_j(\mathbf{x})$  і  $\Theta_{j-1}(\mathbf{x})$ , значення  
 $\bar{\theta}_j$  та  $\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_{j-1}$  для круга радіуса  $R=1$ ,  $j = \overline{1,3}$

$j$	$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x})$	$\arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x})$	$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x}) - \max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_{j-1}(\mathbf{x})$	$\bar{\theta}_j$	$\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_{j-1}$
0	0	$\Omega$	–	0	–
1	0,238825	(0, 0)	0,238825	0,123107	0,123107
2	0,348285	(0, 0)	0,109460	0,172140	0,049033
3	0,395665	(0, 0)	0,047380	0,192640	0,020500

Теплокарти наближень  $\Theta_j(\mathbf{x})$  до розв'язку задачі (4)-(7) на часових шарах  $j \cdot \tau$ ,  $j = \overline{0,3}$ , зображено на рис. 4. У обох випадках накопичення тепла відбувається біля центроїди області (0, 0), яка, повертаючись до даних в табл. 1, є «найтеплішою» точкою.

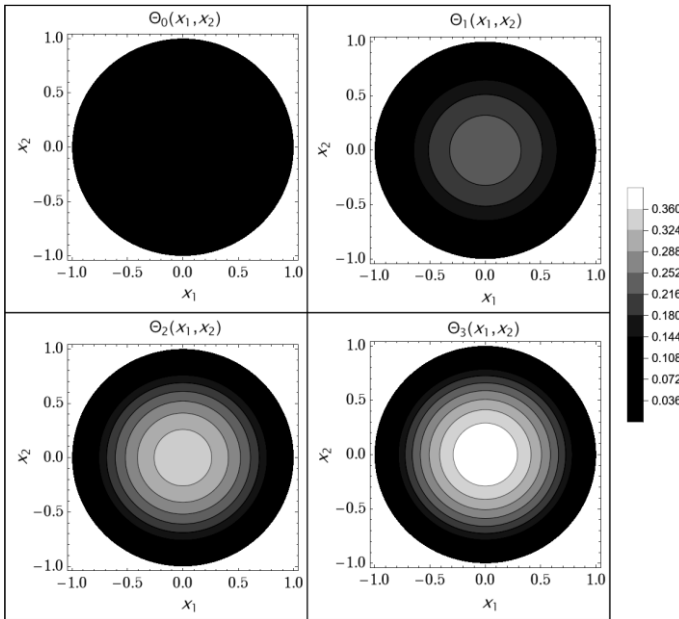


Рис. 4. Графіки теплокарт для розв'язку задачі (4)-(7)  $\Theta_j(\mathbf{x})$   
 для круга радіуса  $R=1$ ,  $j = \overline{0,3}$

Порівнюючи наближення  $\Theta_j(\mathbf{x})$  на часових шарах  $j \cdot \tau$ ,  $j = \overline{1,3}$ , отримані запропонованими методами та отримані в [1] з використанням функції Гріна для кругової області з радіусом  $R=1$  при аналогічних параметрах  $A$ ,  $B$ ,  $\tau$ , маємо, що норми їх різниць в  $C(\overline{\Omega})$  дорівнюють  $0,23 \cdot 10^{-2}$ ,  $0,24 \cdot 10^{-2}$  та  $0,24 \cdot 10^{-2}$  або, у відносному значенні  $0,95\%$ ,  $0,67\%$  та  $0,60\%$  відповідного наближення, з чого можна зробити висновки про хорошу узгодженість цих наближених розв'язків.

**Висновки.** У роботі вперше застосовано метод Роте у поєднанні з методом квазіфункцій Гріна-Рвачова побудови двобічних наближень до знаходження розв'язку початково-крайової задачі для двовимірного напівплінійного рівняння теплопровідності, що виникає при моделюванні процесів самозаймання насипів сипучого матеріалу циліндричної форми з круговою основою. Використання квазіфункцій Гріна-Рвачова дозволяє розглядати область з довільною геометрією, якщо її можна описати методом  $R$ -функцій, а отримані чисельні результати показали хорошу узгодженість з наближеним розв'язком, отриманим за допомогою методу Роте та двобічних наближень з використанням функції Гріна. Перспективним напрямком майбутніх досліджень є як перехід до аналізу трьохвимірних моделей процесів самозаймання, так і використання інших апроксимацій для внутрішнього джерела тепла. Запропонований метод може бути використаний для моделювання накопичення тепла в насипах циліндричної форми з круговою основою, які часто зустрічаються при транспортуванні та зберіганні сипучих матеріалів завдяки відповідній геометрії контейнерів. Це і визначає наукову новизну та практичну значущість отриманих результатів.

### Список використаних джерел:

1. Калініченко А. С. Математичне моделювання процесів самозаймання у насипі з круговим та півкруговим перерізом методами Роте та двобічних наближень. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2024. № 26. С. 37-49.
2. Semenoff N. Zur Theorie des Verbrennungsprozesses. *Zeitschrift für Physik*. 1928. Bd. 48. № 7-8. S. 571-582.
3. Франк-Каменецкий Д. А. Распределение температур в реакционном сосуде и стационарная теория теплового взрыва. *Доклады АН СССР*. 1938. Т. 18. № 7. С. 411-412.
4. Matthew B. Modelling the Self-Heating of Steel Stockpiles. Wollongong: University of Wollongong, 2023. 210 p.
5. Bowes P. C. Self-heating: Evaluating and controlling the hazards. London: Department of the Environment, Building Research Establishment, 1984. 500 p.
6. Франк-Каменецкий Д. А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2008. 408 с.

7. Калініченко А. С. Дослідження процесів самозаймання у насипі з прямокутним перерізом методами Роте та двобічних наближень. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2024. № 25. С. 96-106.
8. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Vol. 10. № 2. P. 360-375.
9. Литвин О. М. Інтерлінація та інтерфлетация функцій і структурний метод В. Л. Рвачова. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50. № 4. С. 61-82.

### References:

1. Kalinichenko A. S. Matematychnе modeliuвання protsesiv samozaimannia u nasypi z kruhovym ta pivkruhovym pererizom metodamy Rote ta dvobichnykh nablyzhen. *Matematychnе ta kompiuterne modeliuвання. Serii: Fyzyko-matematychni nauky*. 2024. № 26. P. 37-49.
2. Semenoff N. Zur Theorie des Verbrennungsprozesses. *Zeitschrift für Physik*. 1928. Bd. 48. № 7-8. P. 571-582.
3. Frank-Kamenetskyi D. A. Raspredelenye temperatur v reaktsyonnom sosude y statsyonarnaia teoriya teplovoho vzryva. *Doklady AN SSSR*. 1938. T. 18. № 7. P. 411-412.
4. Matthew B. Modelling the Self-Heating of Steel Stockpiles. Wollongong: University of Wollongong, 2023. 210 p.
5. Bowes P. C. Self-heating: Evaluating and controlling the hazards. London: Department of the Environment, Building Research Establishment, 1984. 500 p.
6. Frank-Kamenetskyi D. A. Osnovy makrokynetyky. Dyfuzyia y teploperedacha v khymycheskoi kynetyke. Dolhoprudnyi: Yzdatelskyi Dom «Yntellekt», 2008. 408 p.
7. Kalinichenko A. S. Doslidzhennia protsesiv samozaimannia u nasypi z priamokutnym pererizom metodamy Rote ta dvobichnykh nablyzhen. *Matematychnе ta kompiuterne modeliuвання. Serii: Fyzyko-matematychni nauky*. 2024. № 25. P. 96-106.
8. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Vol. 10. № 2. P. 360-375.
9. Lytvyn O. M. Interlinatsiia ta interfletatsiia funktcii i strukturnyi metod V. L. Rvachova. *Matematychni metody ta fyzyko-mekhanichni polia*. 2007. Т. 50. № 4. P. 61-82.

## MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESSES OF SPONTANEOUS IGNITION IN A STOCKPILE WITH A CIRCULAR SECTION BY ROTHE'S AND GREEN-RVACHEV QUASI-FUNCTIONS METHODS OF CONSTRUCTING TWO-SIDED APPROXIMATIONS

Self-ignition of stockpiles of materials such as coal, agricultural crops, cotton, and peat is a consequence of the accumulation of heat released by an exothermic oxidation reaction; therefore, the stockpile can be consid-

ered as a body with an internal heat source. The research of self-ignition processes using mathematical modeling is reduced to the need to find a solution to the initial boundary value problem for a two-dimensional semilinear heat conduction equation. Since it is not always possible to find an analytical solution, it makes sense to use numerical analysis methods.

The aim of this article is a numerical study of the initial boundary value problem for a two-dimensional semilinear heat conduction equation that arises during the mathematical modeling of self-ignition processes of a stockpile of bulk material of cylindrical shape with a circular base using Rothe's method in combination with the Green-Rvachev quasi-functions method of constructing two-sided approximations.

To achieve the set goal, the original initial boundary value problem for the semilinear heat conduction equation using Rothe's method was replaced by a sequence of boundary value problems for a semilinear elliptic equation with the Helmholtz operator, each of which was reduced to the Urysohn integral equation. For this equation, an iterative process with a two-sided character of convergence and a stopping condition, which is based on an a posteriori error estimation, was constructed. Approximation of the power of the internal heat source was carried out using an exponential dependence.

The results of the computational experiment are presented in the form of graphs of approximations to the solution on different time layers and graphs of heat maps, which made it possible to investigate the course of the self-ignition process of a stockpile of cylindrical shape with a circular base.

**Key words:** *mathematical modelling, two-dimensional semilinear heat conduction equation, two-sided approximations method, Rothe's method, self-ignition processes, Urysohn equation, Green-Rvachov quasi-function, R-functions method.*